

Modélisation pour l'ingénieur : approche par Bond Graph

M. Vergé
LMSP

ENSAM, 151 Bd de l'hôpital.
Paris, 75013 France

Phone: 01 44 24 63 30, Fax: +221-45-86 21 18, E-mail: michel.verge@paris.ensam.fr

Mots clé : modélisation, Bond Graph, systèmes mécaniques.

I. RÉSUMÉ - ABSTRACT

Le travail des ingénieurs repose essentiellement sur la qualité des modèles. L'objet de cette présentation est de montrer qu'il existe une méthode systématique de conception du modèle d'une machine composée d'éléments pris dans le domaine de la mécanique ou de l'hydraulique ou de l'électricité, etc... Dans le cas des systèmes où la puissance se conserve, un outil approprié pour effectuer correctement une modélisation est le Bond Graph.

Bond graph modelling provides a powerful approach to modelling engineering systems in which the power exchange mechanism is important. In this paper, we introduce the basic concepts and methods that will be used to develop a systematic model build with bond graph. A mechanical example is explained in detail, the state equations are obtained and some properties are underlined.

II BOND GRAPH

2.1 Généralités

C'est un outil basé sur la notion de transfert d'énergie ou de puissance. Il est en rapide développement et fournit une méthode systématique de conception structurée du modèle. Parmi ses nombreux avantages, citons :

- la possibilité de s'appliquer à de nombreux champs de la physique,
- la conception modulaire de modèles,
- la réalisation d'un modèle « complexe » au moyen de l'inter-connectivité de plusieurs modèles élémentaires,
- l'élaboration systématique des modèles numériques à partir de modèles graphiques.

Le principe fondamental de description repose sur les échanges d'énergie entre les sous-parties d'un système. Ce concept permet de

communiquer entre les différentes communautés scientifiques. Ce concept implique que l'on choisisse deux variables d'énergie (une variable dite **effort** et l'autre **flux**) dont le produit est homogène à une puissance. Le tableau 1 présente les flux et les efforts pour quelques domaines de la physique.

Tableau 1 Définitions pour divers champs de la physique.

Domaine	Effort e	Flux f
Électrique	Tension U (V)	Courant I (A)
Hydraulique	Pression P (Pa)	Débit Q (m ³ /s)
Mécanique : translation	Force F (N)	Vitesse V (m/s)
Mécanique : rotation	Couple τ (N·m)	Vitesse angulaire ω (rad/s)
Thermique	Température (°C)	Taux d'échange thermique dQ/dt (J/s)

La puissance se calcule par :

$$P(t) = e(t) \cdot f(t)$$

Par convention, on utilise une liaison entre deux objets échangeant de la puissance. Cette liaison est matérialisée par un lien terminé par une demi-flèche qui porte les informations e(t) et f(t). C'est un lien énergétique (lien = *bond*).

L'orientation de la demi-flèche indique que la puissance est transmise de A vers B.



Fig. 1. Lien de puissance

2.2 Eléments de Base

Il existe des bibliothèques de composants, citons : les sources de flux et d'effort présentées aux figures 2 et 3.

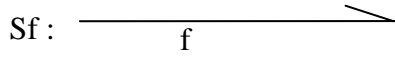


Fig. 2. Source de flux

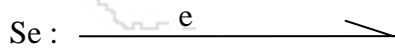


Fig. 3. Source d'effort

Représenté à la figure 4, l'élément R est un élément résistif. En mécanique, il modélise le frottement visqueux. Son équation est :

$$e(t) = R \cdot f(t)$$



Fig. 4. Elément R

Représenté à la figure 5, l'élément I est un élément inertiel. En mécanique, il correspond à une masse ou une inertie. Son équation est :

$$p(t) = I \cdot f(t)$$

que l'on préfère écrire sous forme intégrale:

$$f(t) = \frac{1}{I} \cdot \int_0^t e(\tau) \cdot d\tau$$

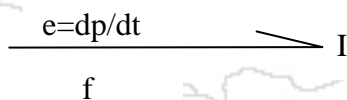


Fig. 5. Elément I

L'élément C (figure 6) est un élément capacitif. En mécanique, il représente un ressort linéaire. Son équation est :

$$q(t) = C \cdot e(t)$$

que l'on préfère écrire sous forme intégrale:

$$e(t) = \frac{1}{C} \cdot \int_0^t f(\tau) \cdot d\tau$$

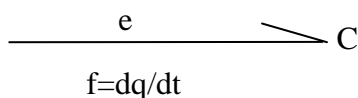


Fig. 6. Elément I

Il existe deux types de jonctions : la jonction 0 implique que la variable effort est commune à plusieurs éléments alors que la jonction 1 traduit un flux commun à plusieurs éléments.

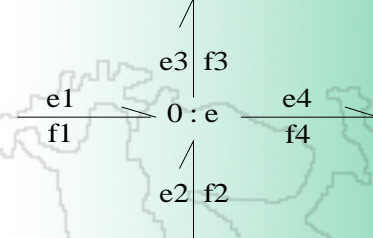


Fig. 7. Jonction 0 avec quatre branches.

La figure 7 correspond à la relation entre flux :

$$f_1 + f_2 - f_3 - f_4 = 0$$

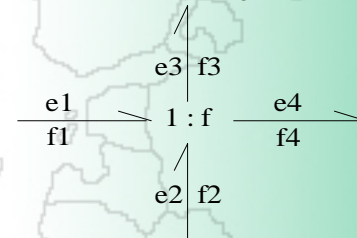


Fig. 8. Jonction 1 avec quatre branches.

La relation entre les efforts de la figure 8 est :

$$e_1 + e_2 - e_3 - e_4 = 0$$

Dans l'équation précédente, ce sont les sens des demi flèches qui fixent les signes.

2.3 Causalité

La causalité est une propriété essentielle du BG. C'est également un moyen de comprendre le modèle, de le structurer. Comme son nom l'indique, la causalité permet de matérialiser la cause d'une grandeur physique. A la figure 9, c'est A qui impose l'effort à B alors que l'inverse se produit à la figure 10.

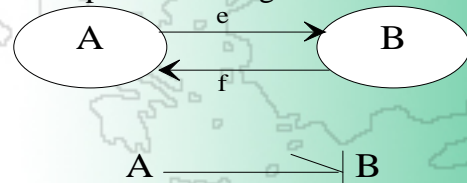


Fig. 9. Barre de causalité près de B

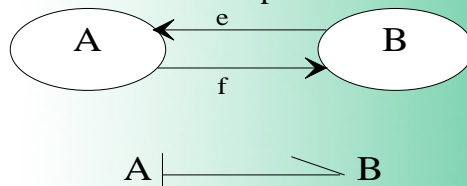


Fig. 10. Barre de causalité près de A

La notion de causalité est **fondamentale** car:

- elle permet de définir quelle est la cause et quelle est la conséquence ;
- elle **structure** les équations : ces structurations ont des conséquences très importantes;
- elle permet, dans certains cas, de détecter des erreurs de modélisation.

Donnons quelques exemples :

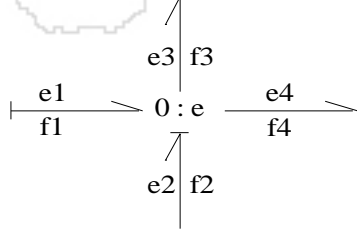


Fig. 11. Jonction 0 avec causalités

Dans les équations associées à la figure 11 nous indiquons entre accolade le signal (e ou f) qui s'impose, nous avons :

$$\begin{cases} e1 = e3 = e4 = \{e2\} \\ f2 = -f1 + f3 + f4 \end{cases}$$

Pour le transformateur, deux cas se présentent : ils sont donnés aux figures 12 et 13.

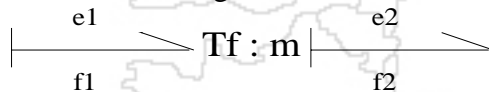


Fig. 12. Transformateur, 1^{er} cas

Les équations associées à la figure 12 sont :

$$\begin{cases} e1 = m \cdot e2 \\ f2 = m \cdot f1 \end{cases}$$

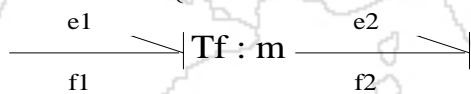


Fig. 13. Transformateur, 2^{ième} cas

Les équations associées à la figure 13 sont :

$$\begin{cases} e2 = \frac{1}{m} \cdot e1 \\ f1 = \frac{1}{m} \cdot f2 \end{cases}$$

De même, pour les gyrateurs deux cas se présentent (figures 14 et 15).

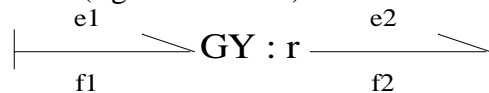


Fig. 14. Gyrateur, 1^{er} cas

Les équations associées à la figure 14 sont :

$$\begin{cases} e1 = r \cdot f2 \\ e2 = r \cdot f1 \end{cases}$$



Fig. 15. Gyrateur, 2^{ième} cas

Les équations associées à la figure 15 sont :

$$\begin{cases} f2 = \frac{1}{r} \cdot e1 \\ f1 = \frac{1}{r} \cdot e2 \end{cases}$$

Remarque : un gyrateur ou un transformateur à gain variable est noté MGY ou MTF.

Causalité intégrale et causalité dérivée.

Les équations des éléments I, C peuvent s'écrire sous une forme intégrale ou sous une forme dérivée selon la position de la barre de causalité. La figure 16 présente le cas de la causalité intégrale pour les éléments I et C. Les équations associées à la figure 16 sont :

$$f = \frac{1}{I} \cdot \int e \cdot dt \quad \text{et} \quad e = \frac{1}{C} \int f \cdot dt$$

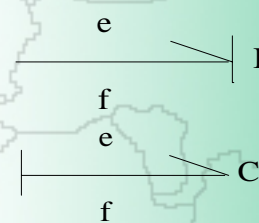


Fig. 16. Eléments en causalité intégrale

Les éléments en causalité dérivée sont présentés à la figure 17. Les équations associées sont :

$$e = I \cdot \frac{df}{dt} \quad \text{et} \quad f = C \cdot \frac{de}{dt}$$



Fig. 17. Eléments en causalité dérivée

Attention, les éléments en causalité dérivée sont à manipuler *avec prudence*.

Il existe des règles de propagation de la causalité (voir bibliographie), conduisant à retenir plusieurs éléments en causalité intégrale et quelques uns en causalité dérivée. L'affectation de la causalité est très importante car : a) elle permet de définir la dimension du vecteur d'état, b) parfois elle fait apparaître des simplifications physiques abusives, c) elles signalent des relations algébriques entre variables.

2.4 Représentation d'état

Le formalisme d'état est un outil essentiel pour la description des systèmes dynamiques. Outre les nombreuses propriétés, la représentation d'état permet d'effectuer des simulations efficaces des systèmes. Enfin, ce formalisme est à l'origine de nombreuses méthodes de commande des systèmes.

Le passage du BG à la représentation d'état s'effectue de façon systématique.

Le vecteur d'état est composé des **variables d'énergie** p_I et q_C associées aux éléments I et C.

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} p_I \\ q_C \end{bmatrix} \quad \text{donc} \quad \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} e_I \\ f_C \end{bmatrix}$$

Propriétés

Si tous les éléments sont en causalité intégrale, la dimension du vecteur d'état est égale au nombre d'éléments I et C.

Si parmi les n éléments I et C il en existe nd en causalité dérivée, alors la dimension du vecteur d'état est $n - nd$.

La représentation d'état des systèmes ayant les entrées regroupées dans le vecteur \underline{u} et les sorties regroupées dans le vecteur \underline{y} est une équation différentielle du premier ordre où la dérivée du vecteur d'état \underline{x} s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = f(\underline{x}, \underline{u}) \\ \underline{y} = g(\underline{x}, \underline{u}) \end{cases}$$

Noter que pour obtenir la représentation d'état, il faut dériver le vecteur d'état et écrire les équations correspondantes. Les variables associées aux éléments en causalité dérivée sont à éliminer (élimination algébrique parfois délicate à réaliser).

III EXEMPLE : MACHA

3.1 Présentation

Voir la photo en fin de texte. Il s'agit d'une poutre se déplaçant dans le plan vertical sous l'effet de deux forces F_1 et F_2 créées par des moteurs électriques de type brushless par l'intermédiaire de poulies et de courroies. Ces moteurs sont pilotés par deux variateurs industriels (non modélisés ici) : à une tension d'alimentation correspond un couple.

Les principales notations utilisées sont les suivantes :

- M_3, M_5 : masse poutre et chariot
- J : inertie de la poutre,
- L : longueur totale de la poutre,
- $L_1 = L_2 = L/2$,
- G_3 : centre de masse de la poutre,
- y : position verticale de G ,
- θ : angle d'inclinaison de la poutre,

La figure 18 présente la poutre le chariot et définit les repères.

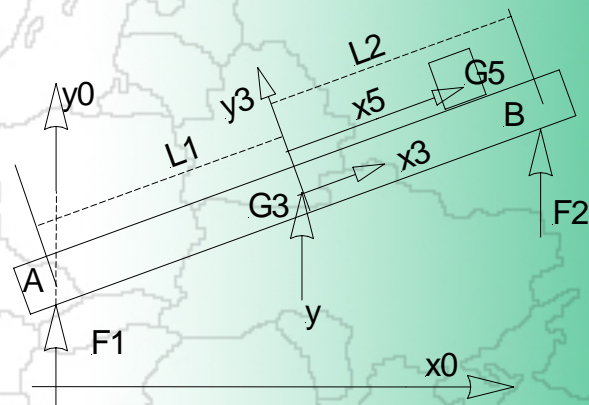


Fig. 18. Notations et repères

3.2 Construction du Bond Graph

Pour le construire, commençons par étudier la relation entre les vitesses. Dans le repère R_0 , la relation entre les vitesses des points A et G_3 appartenant au solide poutre s'écrit, en notant le repère r_0 avant la vitesse VG_3 du point G_3 .

$$r_0VG_3 = r_0VA + r_0\omega \wedge r_0AG_3$$

$$r_0VG_3 = r_0VA + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} L_1 \cdot c\theta \\ L_1 \cdot s\theta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{y}_A \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\dot{\theta} \cdot L_1 \cdot s\theta \\ \dot{\theta} \cdot L_1 \cdot c\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

D'où on déduit :
$$\begin{cases} r0VG3x = -\dot{\theta} \cdot L1 \cdot s\theta \\ r0VG3y = \dot{y}A + \dot{\theta} \cdot L1 \cdot c\theta \end{cases}$$

De même les points B et G3 appartiennent au solide poutre, donc :

$$\underline{r0VG3} = \underline{r0VB} + \underline{r0\omega} \wedge \underline{r0} \wedge \underline{r0BG3}$$

$$\underline{r0VG3} = \underline{r0VB} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} -L2 \cdot c\theta \\ -L2 \cdot s\theta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{y}B \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\theta} \cdot L2 \cdot s\theta \\ -\dot{\theta} \cdot L2 \cdot c\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

D'où on déduit :
$$\begin{cases} r0VG3x = \dot{\theta} \cdot L2 \cdot s\theta \\ r0VG3y = \dot{y}B - \dot{\theta} \cdot L2 \cdot c\theta \end{cases}$$

Remarques :

- a) Les forces appliquées en A et B sont exprimées dans le repère R0. Il n'y a pas de couple exercé directement en G3 selon l'axe G3z.
- b) Les relations entre vitesses se traduisent par le BG de la figure 19 où la jonction 1:r0VAy représente $\dot{y}A$.

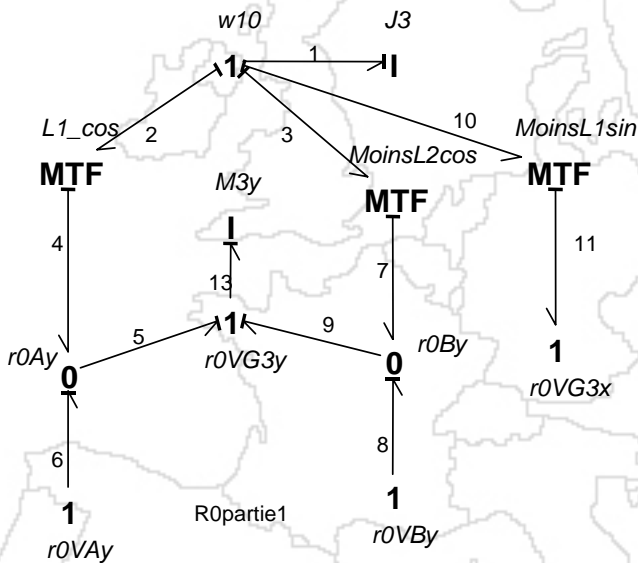


Fig. 19. Relation entre les vitesses

Complétons le BG en incluant les efforts appliqués en A et B ainsi que la gravité.

Dans le repère R0, l'effort appliqué en A s'écrit : $F1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Il en est de même pour l'effort appliqué en B se déplaçant sur une verticale.

Cela se traduit par le BG de la figure 20 où l'on a rajouté la gravité : $grav = -M3 \cdot g$.

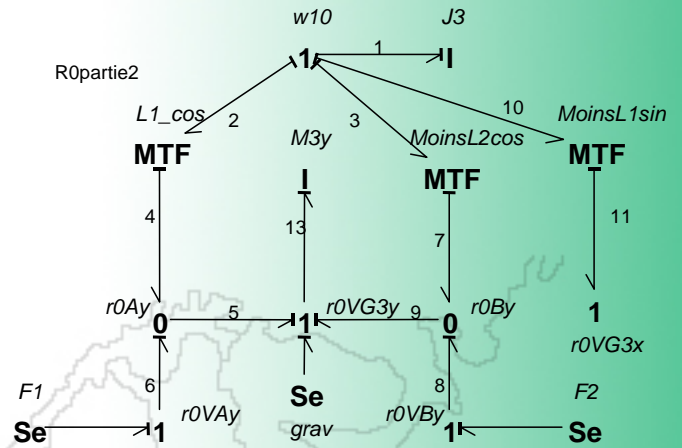


Fig. 20. Modélisation des efforts et gravité

Poursuivons la construction du BG en ajoutant le chariot : les coordonnées de G5 vérifient les équations d'Euler. Dans le repère mobile R5, le chariot présente une seule vitesse de rotation. Les composantes de la vitesse absolue de G5, dans R3 (ou R5) sont reliées par un seul MGY. Ceci est présenté à la figure 21.

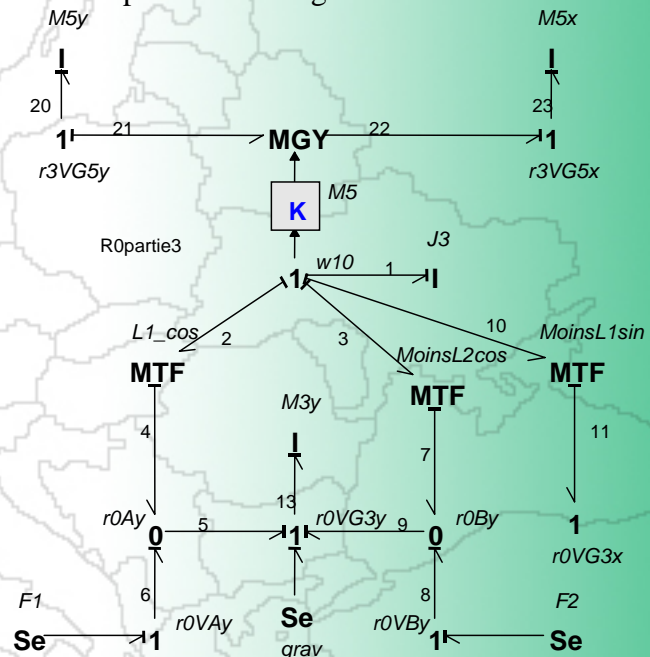


Fig. 21. Modélisation du chariot

Dans le repère R5 le vecteur gravité s'écrit : $-M5 \cdot g \cdot \begin{bmatrix} s\theta \\ c\theta \end{bmatrix}$. Ceci se représente par le BG de la figure 22 où $grav5 = +M5 \cdot g$.

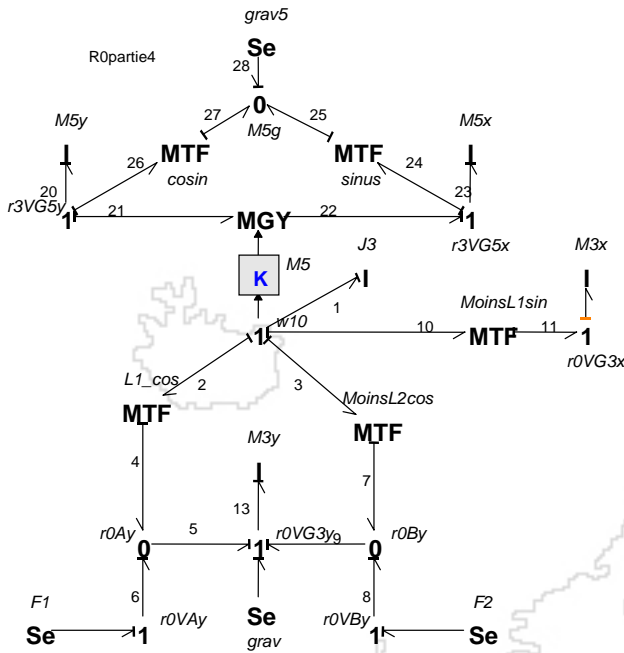


Fig. 22. Modèle de la gravité du chariot

Le chariot glisse sur la poutre. Donc, la vitesse absolue de G5 est donnée par :

$$\underline{VG5} = \underline{VA} + \vec{\omega} \wedge \underline{AG5} + \dot{x}_5 \cdot \vec{x}_3$$

Projetons dans le repère R0 :

$$\underline{r0VG5} = \underline{r0VA} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} (L1 + x_5) \cdot c\theta \\ (L1 + x_5) \cdot s\theta \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c\theta \cdot \dot{x}_5 \\ s\theta \cdot \dot{x}_5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{r0VG5} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{y}_A \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\dot{\theta} \cdot (L1 + x_5) \cdot s\theta \\ \dot{\theta} \cdot (L1 + x_5) \cdot c\theta \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c\theta \cdot \dot{x}_5 \\ s\theta \cdot \dot{x}_5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ou encore :

$$\underline{r0VG5} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta} \cdot (L1 + x_5) \cdot s\theta + c\theta \cdot \dot{x}_5 \\ \dot{y}_A + \dot{\theta} \cdot (L1 + x_5) \cdot c\theta + s\theta \cdot \dot{x}_5 \end{bmatrix}$$

Or la vitesse de G3 a été calculée dans R0. La relation précédente devient alors :

$$\underline{r0VG5} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta} \cdot (L1 + x_5) \cdot s\theta + c\theta \cdot \dot{x}_5 \\ \dot{y}_G + \dot{\theta} \cdot x_5 \cdot c\theta + s\theta \cdot \dot{x}_5 \end{bmatrix}$$

Dans le repère R3, le vecteur vitesse s'écrit :

$$\underline{r3VG5} = \begin{bmatrix} c\theta & s\theta \\ -s\theta & c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\dot{\theta} \cdot (L1 + x_5) \cdot s\theta + c\theta \cdot \dot{x}_5 \\ \dot{y}_G + \dot{\theta} \cdot x_5 \cdot c\theta + s\theta \cdot \dot{x}_5 \end{bmatrix}$$

Après développement il vient :

$$\underline{r3VG5} = \begin{bmatrix} \dot{x}_5 + \dot{y}_G \cdot s\theta - \dot{\theta} \cdot L1 \cdot s\theta \cdot c\theta \\ \dot{y}_G \cdot c\theta + \dot{\theta} \cdot x_5 + \dot{\theta} \cdot s^2\theta \cdot L1 \end{bmatrix}$$

Or l'effort selon l'axe y3 ne travaille pas. Donc seul reste un lien de puissance entre la vitesse r3VG5y et le solide 3.

Remarquer que :

$$\begin{aligned} r3VG5y &= \dot{y}_G \cdot c\theta + \dot{\theta} \cdot x_5 + \dot{\theta} \cdot s^2\theta \cdot L1 \\ &= \dot{y}_G \cdot c\theta + \dot{\theta} \cdot x_5 - s\theta \cdot (-\dot{\theta} \cdot s\theta \cdot L1) \\ &= \dot{y}_G \cdot c\theta + \dot{\theta} \cdot x_5 - s\theta \cdot r0VG3x \end{aligned}$$

Cette liaison se représente selon le BG de la figure 23 (liens 18, 19, 20, 21).

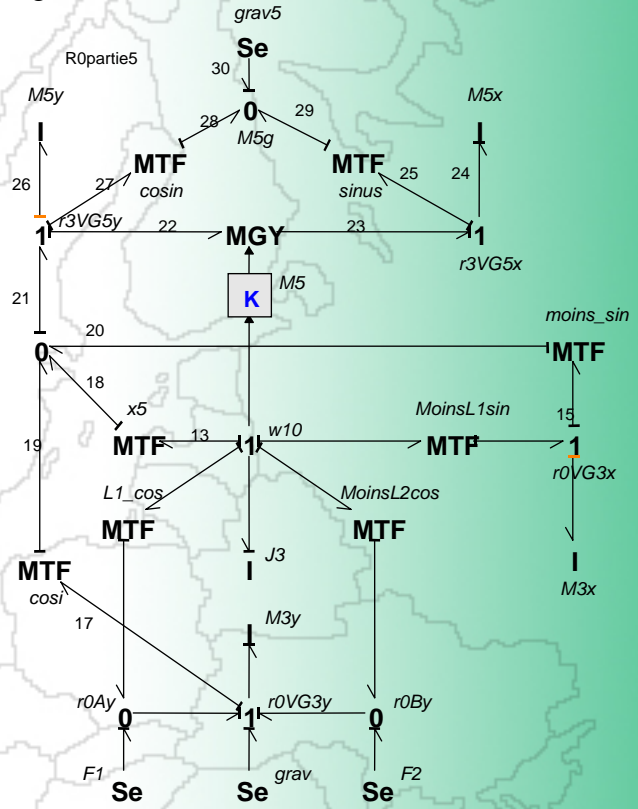


Fig. 23. Modèle de la vitesse du chariot

Le BG est complété par les signaux (flèches pleines) qui alimentent les MTF et MGY : voir la figure 24.

Ce BG comprend 3 éléments I en causalité intégrale et 2 éléments I en causalité dérivée. Donc la dimension du vecteur d'état est 3.

Par conséquent, le BG indique quel est le vecteur d'état représentant la machine, c'est :

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} p_{24} = M5 \cdot f_{24} \\ p_6 = M3 \cdot f_6 \\ p_{10} = J3 \cdot f_{10} \end{bmatrix}$$

Ceci constitue un avantage important de la méthode de modélisation utilisant les BG.

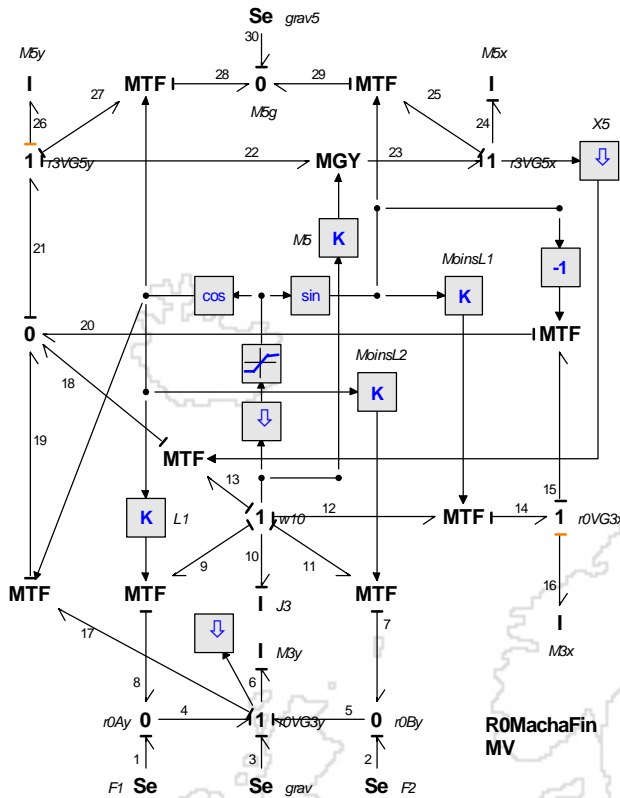


Fig. 24. BG de la machine

3.3 Tableau des équations

<p>Jonction 1: $\omega 30$</p> $\begin{cases} f_9 = f_{11} = f_{12} = f_{13} = \{f_{10}\} = \dot{\theta} \\ e_{10} = -e_9 - e_{11} - e_{12} - e_{13} \end{cases}$ <p>[1]</p>	<p>MTF: $-\sin \theta$</p> $\begin{cases} e_{15} = -\sin \theta \cdot e_{20} \\ f_{20} = -\sin \theta \cdot f_{15} \end{cases}$ <p>[13]</p>
<p>Jonction 1: $r0VG3y$</p> $\begin{cases} f_{17} = f_3 = f_4 = f_5 = \{f_6\} \\ e_6 = e_3 + e_4 + e_5 - e_{17} \end{cases}$ <p>[2]</p>	<p>MTF: $-L1 \cdot \sin \theta$</p> $\begin{cases} e_{12} = -L1 \cdot \sin \theta \cdot e_{14} \\ f_{14} = -L1 \cdot \sin \theta \cdot f_{12} \end{cases}$ <p>[14]</p>
<p>Jonction 1: $r0VG3x$</p> $\begin{cases} f_{15} = f_{16} = \{f_{14}\} \\ e_{14} = e_{15} + e_{16} \end{cases}$ <p>[3]</p>	<p>MTF: $\sin \theta$</p> $\begin{cases} e_{25} = \sin \theta \cdot e_{29} \\ f_{29} = \sin \theta \cdot f_{25} \end{cases}$ <p>[15]</p>
<p>Jonction 1: $r3VG5y$</p> $\begin{cases} f_{22} = f_{26} = f_{27} = \{f_{21}\} \\ e_{21} = e_{22} + e_{26} + e_{27} \end{cases}$ <p>[4]</p>	<p>MTF: $\cos \theta$</p> $\begin{cases} e_{27} = \cos \theta \cdot e_{28} \\ f_{28} = \cos \theta \cdot f_{27} \end{cases}$ <p>[16]</p>
<p>Jonction 1: $r3VG5x$</p> $\begin{cases} f_{23} = f_{25} = \{f_{24}\} \\ e_{24} = e_{23} - e_{25} \end{cases}$ <p>[5]</p>	<p>MTF: $x5$</p> $\begin{cases} e_{13} = x5 \cdot e_{18} \\ f_{18} = x5 \cdot f_{13} \end{cases}$ <p>[17]</p>

<p>Jonction 0: $r0Ay$</p> $\begin{cases} e_4 = e_8 = \{e_1\} = F1 \\ f_1 = f_4 - f_8 \end{cases}$ <p>[6]</p>	<p>MGY: $M5 \cdot \omega 30$</p> $\begin{cases} e_{22} = M5 \cdot \omega 30 \cdot f_{23} \\ e_{23} = M5 \cdot \omega 30 \cdot f_{22} \end{cases}$ <p>[18]</p>
<p>Jonction 0: $r0By$</p> $\begin{cases} e_7 = e_5 = \{e_2\} = F2 \\ f_2 = f_5 - f_7 \end{cases}$ <p>[7]</p>	<p>Éléments en causalité intégrale</p> <p>Élément I: $J3$</p> $\begin{cases} \dot{p}_{10} = e_{10} \\ f_{10} = \frac{1}{J3} \cdot p_{10} = \dot{\theta} \end{cases}$ <p>[19]</p>
<p>Jonction 0</p> $\begin{cases} e_{18} = e_{19} = e_{20} = \{e_{21}\} \\ f_{21} = f_{18} + f_{19} + f_{20} \end{cases}$ <p>[8]</p>	<p>Élément I: $M3y$</p> $\begin{cases} \dot{p}_6 = e_6 \\ f_6 = \frac{1}{M3} \cdot p_6 \end{cases}$ <p>[20]</p>
<p>Jonction 0: $gM5$</p> $\begin{cases} e_{28} = e_{29} = \{e_{30}\} = M5 \cdot g \\ f_{30} = -f_{28} - f_{29} \end{cases}$ <p>[9]</p>	<p>Élément I: $M5x$</p> $\begin{cases} \dot{p}_{24} = e_{24} \\ f_{24} = \frac{1}{M5} \cdot p_{24} \end{cases}$ <p>[21]</p>
<p>MTF: $\cos \theta$ de 17 à 18</p> $\begin{cases} e_{17} = \cos \theta \cdot e_{19} \\ f_{19} = \cos \theta \cdot f_{17} \end{cases}$ <p>[10]</p>	<p>Éléments en causalité dérivée</p> <p>Élément I: $M3x$</p> $\begin{cases} p_{16} = M3 \cdot f_{16} \\ e_{16} = \dot{p}_{16} \end{cases}$ <p>[22]</p>
<p>MTF: $L1 \cdot \cos \theta$</p> $\begin{cases} e_9 = L1 \cdot \cos \theta \cdot e_8 \\ f_8 = L1 \cdot \cos \theta \cdot f_9 \end{cases}$ <p>[11]</p>	<p>Élément I: $M5y$</p> $\begin{cases} p_{26} = M5 \cdot f_{26} \\ e_{26} = \dot{p}_{26} \end{cases}$ <p>[23]</p>
<p>MTF: $-L2 \cdot \cos \theta$</p> $\begin{cases} e_{11} = -L2 \cdot \cos \theta \cdot e_7 \\ f_7 = -L2 \cdot \cos \theta \cdot f_{11} \end{cases}$ <p>[12]</p>	

3.4 Exemples d'équation

Pour obtenir les équations, il faut procéder par étapes :

- traiter les éléments en causalité dérivée,
- dériver les équations obtenues,
- traiter les éléments en causalité intégrale en éliminant les termes associés aux éléments en causalité dérivée.

Par exemple, considérons l'élément I:M3x qui est en causalité dérivée. Nous avons :

$$p_{16} = M3 \cdot f_{16} \quad \text{d'après 22}$$

$$p_{16} = M3 \cdot f_{14} \quad \text{d'après 3}$$

$$p_{16} = -M3 \cdot L1 \cdot s \theta \cdot f_{12} \quad \text{d'après 14}$$

$$p_{16} = -M3 \cdot L1 \cdot s \theta \cdot \dot{\theta} \quad \text{d'après 1}$$

$$p_{16} = -\frac{M3 \cdot L1}{J3} \cdot s \theta \cdot p_{10} \quad \text{d'après 19}$$

D'où

$$\dot{p}_{16} = -\frac{M3 \cdot L1}{J3} \cdot s\theta \cdot p_{10}$$

Un traitement analogue pour l'éléments I :M5y conduit à :

$$\dot{p}_{26} = \frac{M5}{J3} \cdot x5 \cdot p_{10} + \frac{M5 \cdot L1}{J3} \cdot s^2\theta \cdot p_{10} + \frac{M5}{M3} \cdot c\theta \cdot p_6$$

La dérivation de ces deux équations donne :

$$\dot{p}_{26} = \frac{M5}{J3} \cdot \dot{p}_{10} \cdot x5 + \frac{2M5 \cdot L1}{J3^2} \cdot s\theta \cdot c\theta \cdot p_{10}^2 + \frac{M5}{J3} \cdot \dot{p}_{10} \cdot (x5 + L1 \cdot s^2\theta) + \frac{M5}{M3} \cdot c\theta \cdot \dot{p}_6 - \frac{M5}{M3 \cdot J3} \cdot s\theta \cdot p_6 \cdot p_{10}$$

et :

$$\dot{p}_{16} = -\frac{M3 \cdot L1}{J3} \cdot s\theta \cdot \dot{p}_{10} - \frac{M3 \cdot L1}{J3^2} \cdot c\theta \cdot p_{10}^2$$

A titre d'exemple, considérons le traitement d'un l'élément en causalité intégrale I :M5x.

$$\dot{p}_{24} = e_{24} \quad \text{d'après 21}$$

$$\dot{p}_{24} = e_{23} - e_{25} \quad \text{d'après 5}$$

$$\dot{p}_{24} = M5 \cdot \dot{\theta} \cdot f_{22} - s\theta \cdot e_{29} \quad \text{d'après 18, 15}$$

$$\dot{p}_{24} = M5 \cdot \dot{\theta} \cdot f_{21} - s\theta \cdot M5 \cdot g \quad \text{d'après 4, 9}$$

$$\dot{p}_{24} = M5 \cdot \dot{\theta} \cdot (f_{18} + f_{19} + f_{20}) - s\theta \cdot M5 \cdot g \quad \text{d'après 8}$$

$$\dot{p}_{24} = M5 \cdot \dot{\theta} \cdot f_{18} + M5 \cdot \dot{\theta} \cdot f_{19} + M5 \cdot \dot{\theta} \cdot f_{20} - s\theta \cdot M5 \cdot g$$

Développons en utilisant : 17, 10, 13

$$\dot{p}_{24} = M5 \cdot \dot{\theta} \cdot x5 \cdot f_{13} + M5 \cdot \dot{\theta} \cdot c\theta \cdot f_{17}$$

$$- M5 \cdot \dot{\theta} \cdot s\theta \cdot f_{15} - s\theta \cdot M5 \cdot g$$

$$\dot{p}_{24} = M5 \cdot \dot{\theta} \cdot x5 \cdot f_{10} + M5 \cdot \dot{\theta} \cdot c\theta \cdot f_6 \quad \text{d'après 1, 2, 3}$$

$$- M5 \cdot \dot{\theta} \cdot s\theta \cdot f_{14} - s\theta \cdot M5 \cdot g$$

$$\dot{p}_{24} = \frac{M5}{J3^2} \cdot x5 \cdot p_{10}^2 + \frac{M5}{M3 \cdot J3} \cdot c\theta \cdot p_6 \cdot p_{10} \quad \text{avec 19, 20}$$

$$- M5 \cdot \dot{\theta} \cdot s\theta \cdot f_{14} - s\theta \cdot M5 \cdot g$$

$$\dot{p}_{24} = \frac{M5}{J3^2} \cdot x5 \cdot p_{10}^2 + \frac{M5}{M3 \cdot J3} \cdot c\theta \cdot p_6 \cdot p_{10} \quad \text{d'après 14}$$

$$+ M5 \cdot L1 \cdot \dot{\theta} \cdot s^2\theta \cdot f_{12} - s\theta \cdot M5 \cdot g$$

$$\dot{p}_{24} = \frac{M5}{J3^2} \cdot x5 \cdot p_{10}^2 + \frac{M5}{M3 \cdot J3} \cdot c\theta \cdot p_6 \cdot p_{10} \quad \text{d'après 1}$$

$$+ M5 \cdot L1 \cdot \dot{\theta} \cdot s^2\theta \cdot f_{10} - s\theta \cdot M5 \cdot g$$

$$\dot{p}_{24} = \frac{M5}{J3^2} \cdot x5 \cdot p_{10}^2 + \frac{M5}{M3 \cdot J3} \cdot c\theta \cdot p_6 \cdot p_{10} \quad \text{d'après 19}$$

$$+ \frac{M5}{J3^2} \cdot L1 \cdot s^2\theta \cdot p_{10}^2 - s\theta \cdot M5 \cdot g$$

$$\dot{p}_{24} = \frac{M5}{J3^2} \cdot (x5 + L1 \cdot s^2\theta) \cdot p_{10}^2 \quad \text{en regroupant}$$

$$+ \frac{M5}{M3 \cdot J3} \cdot c\theta \cdot p_6 \cdot p_{10} - s\theta \cdot M5 \cdot g$$

Finalement :

$$\dot{p}_{24} = \frac{M5}{J3^2} \cdot (x5 + L1 \cdot s^2\theta) \cdot p_{10}^2 + \frac{M5}{M3 \cdot J3} \cdot c\theta \cdot p_6 \cdot p_{10} - s\theta \cdot M5 \cdot g$$

[24]

Pour les deux autres éléments en causalité intégrale, le traitement analogue fournit :

$$\left(1 + \frac{M5}{M3} \cdot c^2\theta\right) \cdot \dot{p}_6 = -(M3 + c^2\theta \cdot M5) \cdot g + F1 + F2 - \frac{1}{J3} \cdot c\theta \cdot p_{10} \cdot p_{24} - \frac{M5}{J3} \cdot c\theta \cdot x5 \cdot p_{10} - \frac{2 \cdot M5 \cdot L1}{J3^2} \cdot s\theta \cdot c^2\theta \cdot p_{10}^2 - \frac{M5}{J3} \cdot c\theta \cdot (x5 + L1 \cdot s^2\theta) \cdot \dot{p}_{10} + \frac{M5}{M3 \cdot J3} \cdot s\theta \cdot c\theta \cdot p_6 \cdot p_{10}$$

[25]

$$\left(1 + \frac{M3 \cdot L1^2}{J3} \cdot s^2\theta + \frac{M5}{J3} \cdot (L1 \cdot s^2\theta + x5)^2\right) \cdot \dot{p}_{10} = -(L1 \cdot s^2\theta + x5) \cdot \frac{1}{J3} \cdot p_{10} \cdot p_{24} - (L1 \cdot s^2\theta + x5) \cdot c\theta \cdot M5 \cdot g - \frac{M3 \cdot L1^2}{J3^2} \cdot s\theta \cdot c\theta \cdot p_{10}^2 - \frac{M5}{J3} \cdot x5 \cdot (L1 \cdot s^2\theta + x5) \cdot p_{10} - (L1 \cdot s^2\theta + x5) \cdot \frac{2 \cdot M5 \cdot L1}{J3^2} \cdot s\theta \cdot c\theta \cdot p_{10}^2 + \frac{M5}{M3 \cdot J3} \cdot s\theta \cdot (L1 \cdot s^2\theta + x5) \cdot p_6 \cdot p_{10} - (L1 \cdot s^2\theta + x5) \cdot \frac{M5}{M3} \cdot c\theta \cdot \dot{p}_6 + c\theta \cdot (L2 \cdot F2 - L1 \cdot F1)$$

[26]

Nous avons donc obtenu 3 équations qui ne dépendent que du vecteur d'état et des entrées F1 et F2. Les équations 24, 25 et 26 constituent une représentation d'état non linéaire sous la forme : $\Phi(\underline{x}) \cdot \dot{\underline{x}} = f(\underline{x}) + g(\underline{x}) \cdot \underline{u}$.

3.4 Mise sous forme définitive

En robotique, il est d'usage de considérer le vecteur des variables articulaires car elles sont généralement mesurées :

$$\underline{q} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x5 \\ yG \\ \theta \end{bmatrix}$$

Nous avons :

$$p_6 = M3 \cdot \dot{y}G = M3 \cdot \dot{y}$$

$$p_{10} = J3 \cdot \dot{\theta}$$

$$p_{24} = M5 \cdot \dot{f}_{24} = M5 \cdot (\dot{x}5 + \dot{y} \cdot s\theta - \dot{\theta} \cdot L1 \cdot s\theta \cdot c\theta) \quad [27]$$

Dérivons 27:

$$\dot{p}_{24} = M5 \cdot \begin{pmatrix} \ddot{x}5 + \ddot{y} \cdot s\theta + \dot{y} \cdot \dot{\theta} \cdot c\theta - \ddot{\theta} \cdot L1 \cdot s\theta \cdot c\theta \\ - \dot{\theta}^2 \cdot L1 \cdot c^2\theta + \dot{\theta}^2 \cdot L1 \cdot s^2\theta \end{pmatrix}$$

La relation 28 devient :

$$M5 \cdot \begin{pmatrix} \ddot{x}5 + \ddot{y} \cdot s\theta + \dot{y} \cdot \dot{\theta} \cdot c\theta - \ddot{\theta} \cdot L1 \cdot s\theta \cdot c\theta \\ - \dot{\theta}^2 \cdot L1 \cdot c^2\theta + \dot{\theta}^2 \cdot L1 \cdot s^2\theta \end{pmatrix} = \frac{M5}{J3^2} \cdot (x5 + L1 \cdot s^2\theta) \cdot p_{10}^2 + \frac{M5 \cdot c\theta}{M3 \cdot J3} \cdot p_6 \cdot p_{10} - s\theta \cdot M5 \cdot g$$

ou encore :

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_5 + \ddot{y} \cdot s\theta + \dot{y} \cdot \dot{\theta} \cdot c\theta - \ddot{\theta} \cdot L_1 \cdot s\theta \cdot c\theta \\ -\dot{\theta}^2 \cdot L_1 \cdot c^2\theta + \dot{\theta}^2 \cdot L_1 \cdot s^2\theta \end{pmatrix} \\ = (x_5 + L_1 \cdot s^2\theta) \cdot \dot{\theta}^2 + c\theta \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{y} - s\theta \cdot g$$

Simplifions :

$$\ddot{x}_5 + \ddot{y} \cdot s\theta - \ddot{\theta} \cdot L_1 \cdot s\theta \cdot c\theta - \dot{\theta}^2 \cdot L_1 \cdot c^2\theta \\ - x_5 \cdot \dot{\theta}^2 + s\theta \cdot g = 0 \quad [28]$$

Un traitement analogue conduit à :

$$(M_3 + M_5) \cdot \ddot{y} + M_5 \cdot c\theta \cdot x_5 \cdot \ddot{\theta} - M_5 \cdot s\theta \cdot x_5 \cdot \dot{\theta}^2 \\ + M_5 \cdot s\theta \cdot \ddot{x}_5 + 2 \cdot M_5 \cdot c\theta \cdot x_5 \cdot \dot{\theta} + (M_3 + M_5) \cdot g - F_1 - F_2 = 0 \quad [29]$$

et

$$(J_3 + M_3 \cdot L_1^2 \cdot s^2\theta + M_5 \cdot Q^2) \cdot \ddot{\theta} = \\ -2 \cdot (L_1 \cdot s^2\theta + x_5) \cdot \dot{\theta} \cdot M_5 \cdot x_5 \\ - (L_1 \cdot s^2\theta + x_5) \cdot M_5 \cdot L_1 \cdot s\theta \cdot c\theta \cdot \dot{\theta}^2 \\ - (L_1 \cdot s^2\theta + x_5) \cdot c\theta \cdot M_5 \cdot g - M_3 \cdot L_1^2 \cdot s\theta \cdot c\theta \cdot \dot{\theta}^2 \\ - (L_1 \cdot s^2\theta + x_5) \cdot M_5 \cdot c\theta \cdot \ddot{y} + c\theta \cdot (L_2 \cdot F_2 - L_1 \cdot F_1) \quad [30]$$

avec : $Q = (L_1 \cdot s^2\theta + x_5)$

Regroupons les équations 28, 29 et 30 sous la forme :

$$D(\underline{q}) \cdot \ddot{\underline{q}} + C(\underline{q}, \dot{\underline{q}}) \cdot \dot{\underline{q}} + \underline{g}(\underline{q}) = \underline{u}(t)$$

avec :

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_1 + F_2 \\ \cos\theta \cdot L_1 \cdot (F_2 - F_1) \end{bmatrix}$$

La matrice des termes inertiels D est une matrice carrée 3,3. Donnons ses colonnes :

$$D(\underline{q}), \text{col1} = \begin{bmatrix} M_5 \\ M_5 \cdot s\theta \\ M_5 \cdot s\theta \end{bmatrix}$$

$$D(\underline{q}), \text{col2} = \begin{bmatrix} M_5 \cdot s\theta \\ M_3 + M_5 \\ M_5 \cdot c\theta \cdot x_5 \end{bmatrix}$$

Posons : $M_{35} = M_3 + M_5$

$$D(\underline{q}), \text{col3} = \begin{bmatrix} -M_5 \cdot L_1 \cdot s\theta \cdot c\theta \\ M_5 \cdot c\theta \cdot x_5 \\ J_3 + M_{35} \cdot L_1^2 \cdot s^2\theta + M_5 \cdot x_5^2 + 2 \cdot M_5 \cdot x_5 \cdot L_1 \cdot s^2\theta \end{bmatrix}$$

La matrice de Coriolis est :

$$C(\underline{q}, \dot{\underline{q}}) =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -M_5 \cdot L_1 \cdot c^2\theta \cdot \dot{\theta} - M_5 \cdot x_5 \cdot \dot{\theta} \\ 2 \cdot M_5 \cdot c\theta \cdot \dot{\theta} & 0 & -M_5 \cdot s\theta \cdot x_5 \cdot \dot{\theta} \\ 2 \cdot M_5 \cdot (L_1 \cdot s^2\theta + x_5) \cdot \dot{\theta} & 0 & (2 \cdot M_5 \cdot x_5 + M_5 \cdot L_1 + M_3 \cdot L_1) \cdot L_1 \cdot s\theta \cdot c\theta \cdot \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

Le vecteur des termes de gravité est :

$$\underline{g}(\underline{q}) = \begin{bmatrix} M_5 \cdot s\theta \\ M_3 + M_5 \\ M_5 \cdot x_5 \cdot c\theta \end{bmatrix}$$

Notons que dans ce modèle la matrice D est à déterminant positif, elle est donc toujours inversible. De plus, on peut vérifier que l'approche Lagrangienne fournit les mêmes équations.

IV CONCLUSIONS

Les Bond Graphs présentent plusieurs avantages pour modéliser un système physique. Retenons les plus importants :

- la modélisation d'un modèle « complexe » au moyen de l'inter connectivité de plusieurs modèles élémentaires,
- l'élaboration systématique des modèles numériques à partir de modèles graphiques,
- la définition du vecteur d'état dont les composantes ont une interprétation physique et sont très souvent liées aux divers capteurs.

Ces propriétés se traduisent par le développement de logiciel permettant d'obtenir la représentation d'état et possédant de nombreuses possibilités de simuler plusieurs types de régulateurs.

Enfin signalons que plusieurs entreprises utilisent le BG afin de faciliter le dialogue entre spécialistes de plusieurs domaines.

Terminons par souligner que la recherche est très soutenue dans ce domaine.

REFERENCES

Dauphin-Tanguy G (2000) Les bond graphs. Hermes Science publications.

Karnop D, Margolis D, Rosenberg R (1990) Systems dynamics: A unified approach. John Wiley and Sons, New York.

Paynter H (1961) Analysis and design of engineering systems. MIT Press, Cambridge.

Thoma J, Ould Bouamama B. (2000) Modelling and Simulation in Thermal and Chemical

Engineering: a Bond Graph Approach. Springer-Verlag.

M. Vergé, D. Jaume. (2003) Modélisation structurée des systèmes avec les Bond Graphs Editions Technip.



Machine Macha