

## CHAPITRE XIII

### PRINCIPES DE CORRESPONDANCES

"Nous pouvons diviser de plusieurs manières ce qui tombe sous le concept de rouge, sans que les parties ainsi obtenues cessent d'être subsumées par ce concept. À un tel concept on ne peut attribuer aucun nombre fini."

Frege [1]

Pour ne pas être trop abstrait nous commencerons par être restrictif ; l'extension se fera ultérieurement (pour les éléments techniques relatifs à la théorie des ensembles, voir [2], [3]).

#### 1. DOMAINES ET CARDINALITES

##### 1.1. Mises en place

Nous poserons<sup>1</sup> que le domaine de l'*expérience existentielle*, le vécu évoqué plus haut, est associable à des types d'ordre d'ensembles caractérisés par la cardinalité du dénombrable **d** (= **aleph<sub>0</sub>**). Plus : que cette puissance d'ensemble est cela même qui indice ces expériences, si variés que soient les types d'ordre mis à contribution pour établir, au niveau le plus fin, la correspondance.

Au conceptuel, au *pensé*, effet de la réflexion ou de l'abstraction, on associera de même des types d'ordre d'ensembles caractérisés par la puissance du continu **c** (= **aleph<sub>1</sub>** sous l'hypothèse du continu).

Par contraste, à l'exercice de la *maîtrise* sur ce que l'on caractérise comme objets, fussent-ils objets psychologiques ou sociaux réifiés ou instrumentalisés, on fera correspondre le fini, *n* (quel que soit *n*, car c'est la catégorie du fini qui importe pour l'instant ; la définition du fini, relativement à l'infini, avec les nuances apportées par la mathématique non standard entre formellement fini et calculablement fini sera reprise et analysée plus tard).

Ce seront là nos bases principiellles. L'argumentation de ces choix s'appuiera, à ce stade, et malgré le début de considérations formelles de la note précédente, sur des références de type essentiellement analogique, à savoir que :

(i) l'expérience vécue recèle (en tant que passé récupéré par la tradition et la mémoire, en tant que présent assumé, et en tant qu'avenir déterminé et projeté) les potentialités et effectuations inépuisables du dénombrable, sans atteindre pourtant à la puissance du continu ;

(ii) seul l'effet d'abstraction, qui permet la construction de l'ensemble des parties des ensembles existentiels considérés, devient susceptible de mettre ce domaine en correspondance avec la puissance du continu ( $2^d = c$ ) ;

(iii) à l'inverse, dans l'effet de maîtrise, d'une part ces possibles viennent se limiter et d'autre part les ordinalités et cardinalités viennent à coïncider, comme il en va des ensembles finis.

On a ainsi fixé la correspondance pour les *domaines* considérés dans le chapitre précédent.

Revenons maintenant brièvement sur le contenu des assignations proposées, d'un point de vue conceptuel d'abord, puis plus technique ensuite.

---

<sup>1</sup> C'est au niveau de ce choix, et à côté d'autres arguments, de type heuristique, que nous sommes amené à invoquer d'emblée le théorème de Löwenheim-Skolem, à savoir que *tout ensemble cohérent d'axiomes associés à une logique des prédicats du premier ordre a un modèle dont l'univers est infini dénombrable*. Il semble "naturel" d'admettre que c'est précisément d'un tel univers qu'il s'agit lorsque l'on se propose de commencer à établir la correspondance.

## 1.2. Commentaires

(i) Que la représentation du fini calculable caractérise la maîtrise et doive ainsi lui correspondre, on le discerne dans l'analyse de la position du sujet à propos de la domination qu'il exerce ou subit : cette position est étroitement associée à une réification et une instrumentalisation de ce sur quoi une maîtrise est exercée. En même temps en est, par là même, postulée une exhaustibilité, grâce à quoi on peut circonscrire et totaliser un donné (condition préalable à l'exercice pratique de la maîtrise ou de la domination). A cette objectification réelle ou supposée qui délimite et circonscrit un donné exhaustible, épuisable, maîtrisable, correspond bien une représentation par la finitude la plus classique.

Par contraste, dans la relation vécue où des subjectivités échangent entre elles et se constituent elles-mêmes à travers ces échanges, c'est la réalité d'une inépuisabilité de rapports mutuels, d'expériences interhumaines qui s'exprime et qui laisse la place à l'invention relationnelle ; ce que le fini ne peut enclorre de richesse proliférante et innovante quant au "contenu". Il faudra évidemment affiner cette analyse, notamment quand il s'agira de spécifier les catégories qui prennent place dans ce domaine, en tenant compte de la dualité de points de vue qui s'impose, selon que l'on considère la phénoménalité sous l'angle du sujet lui-même ou des opérations dont il est à l'origine ou le destinataire. Nous y reviendrons plus tard, à l'occasion de la mise en place des *catégories* qui repèrent et structurent chacun des domaines.

Dans le pensé et le conceptuel enfin, c'est tout le contenu de l'expérience humaine dans ses maîtrises d'une part, ses relations de l'autre, qui se trouve doté de significations et thématisée par combinatoire, association abstraite, etc., en sorte qu'en deviennent les objets tous les sous-ensembles et parties qui peuvent être formés à partir de ces expériences considérées comme composantes. C'est-à-dire, en tout état de cause, un ensemble de parties, de cardinalité supérieure à celui qui a ces expériences pour éléments. On peut même faire usage ici d'un argument qui s'apparente à la preuve diagonale ; parmi toutes les conceptualisations abstraites associatives, si on les considérait comme formant un ensemble de puissance équivalente à celle de l'ensemble des expériences relationnelles, on en trouverait qui ne figureraient pas dans cet ensemble supposé complet : celles-là mêmes qui résulteraient d'une combinatoire dont les éléments viendraient tous dans des places différentes de celles où ils apparaissent déjà (d'où la nécessité de recourir pour la représentation à un ensemble de cardinalité supérieure, le continu en l'occurrence).

(ii) Venons-en à une remarque plus technique. Pour caractériser les différents domaines, nous avons introduit les cardinalités les plus basses : fini, dénombrable, continu. Quels sont les avantages d'un tel choix par rapport à d'autres qui auraient pu paraître *a priori* équivalents ?

Sans revenir aux analogies liées aux contenus conceptuels, nous noterons que la particularité essentielle tient à l'affectation du fini à la situation de domination ou de maîtrise ; cette caractérisation fait jouer à ce domaine un rôle très spécial par rapport aux autres puissances d'ensemble. En effet, il n'existe pas de procédure interne qui permette de passer, sans axiome d'existence explicite, d'un ensemble de cardinalité finie à un ensemble infini (même dans le cas dénombrable) ; alors que la procédure de formation de l'ensemble des parties d'un ensemble permet, pour sa part, de passer d'une cardinalité infinie à une autre (d'un **aleph** au suivant :  $2^{\text{aleph}_j} = \text{aleph}_{j+1}$ , sous l'hypothèse généralisée du continu). Il apparaît donc, dès l'abord, une sorte de coupure radicale entre la situation de maîtrise et celles dans lesquelles les cardinalités sont infinies (relationnel, pensé). Cette coupure est satisfaisante dans la mesure où nous concevons, en effet, la situation de domination comme ne visant à mettre en jeu que des représentations de choses ou de manipulations portant sur ces choses, là où pourtant des rapports humains devraient se trouver engagés (comme c'est le cas dans les deux autres domaines). La question se posera donc ultérieurement des voies et des moyens du passage par "infinisation", de ce domaine fini aux domaines infinis (l'extraction hors d'une situation de domination, la venue à la pertinence d'enjeux humains) ou, à l'inverse, de la capacité d'inscription dans un état de fait maîtrisé, d'acquis relationnels ou abstraits (par restriction cette fois d'un infini à du fini).

Une autre propriété fondamentale, associée au contraste entre ensembles finis et infinis, tient à ce que dans les ensembles finis les nombres cardinaux et ordinaux sont confondus. Dans les ensembles

infinis, au contraire, à une même cardinalité correspondent non seulement des types d'ordre, mais aussi des nombres ordinaux très variés (en nombre, eux-mêmes, infini). La distinction qui en résulte apporte une très grande richesse calculatoire et conceptuelle, richesse que l'on associe à la souplesse et l'inépuisabilité du relationnel ou du pensé, par opposition à la rigidité complètement déterminée de la situation de maîtrise.

Ces points importants une fois précisés, rien ne s'oppose ensuite, grâce à la générativité propre à la formation des ensembles cantorien, de considérer, pour tel ou tel problème particulier, des ensembles munis d'**aleph** d'indice quelconque, pourvu que les *rappports* entre eux correspondent à la nature des rapports que l'on cherche à traiter. On sait en effet que l'indiciation n'a pas de valeur absolue et que l'on peut relativiser les cardinaux transfinis entre eux (*cf.* le paradoxe de Skolem), une fois acquis le dénombrable.

## 2. CATEGORIES ET TYPES D'ORDRE

### 2.1. Considérations générales

Une fois mises en place les cardinalités relatives aux domaines, considérons, sans encore entrer dans les détails, les *catégories* appelées à y trouver place, catégories que nous représenterons par des *types d'ordre* (et, parmi eux, des nombres ordinaux) correspondant à la cardinalité du domaine considéré.

Il est inutile de revenir sur le domaine du fini, puisque comme nous venons de le voir, il n'y a pas, pour lui, de distinction entre cardinalités et ordinalité (la catégorie de la domination est coextensive à son domaine, pourrait-on dire). Intéressons-nous plutôt aux deux autres domaines.

Considérons d'abord le domaine du relationnel et sa cardinalité dénombrable. Avant de procéder aux catégorisations elles-mêmes et aux spécifications des types d'ordre correspondant, nous commencerons par faire une remarque fondamentale, déjà évoquée précédemment. Il convient, dans ce domaine, de discriminer entre les caractéristiques pertinentes des types d'ordre, selon l'angle sous lequel on considère les catégories (c'est-à-dire selon l'angle sous lequel on procède à l'analyse des phénomènes). En effet, la compréhension phénoménale dans le domaine humain relationnel engage à la fois deux mouvements très différents dont chacun semble nécessaire : un mouvement orienté sur et par le sujet, mouvement selon lequel "on peut se mettre à la place" (du sujet considéré ; *cf.* la "compréhension" weberienne) et un mouvement de type beaucoup plus objectif, auquel on rapporte les opérations relatives au sujet (celles qu'il effectue ou qui le sollicitent), dans une sorte de mise à distance qui les détache du sujet proprement dit, tout en les y maintenant référées.

Dans la première perspective, à l'engagement du sujet relationnel on fera correspondre les types d'ordre *denses*. Pour justifier un tel choix nous aurons recours à une homologie. En effet, on peut considérer qu'un sujet reste toujours identifiable entre deux de ses identifications, si "rapprochées" soient-elles l'une de l'autre (permanence de l'identité), ce qui, dans le dénombrable, renvoie précisément à la propriété de densité. De même, entre deux spécifications d'une aperception subjective, il est toujours possible de trouver ou de construire une nuance intermédiaire. Ainsi admettons-nous que la densité caractérise cette facette manifeste du phénomène lorsqu'on le rapporte à *qui* en fait l'expérience.

Dans la seconde perspective, en tant que c'est l'activité opératoire des sujets qui est engagée dans la relation intersubjective, on fait correspondre (pour une même catégorie) des types d'ordre *discrets*. Dans ce cas, en effet, pour reprendre l'homologie, la séquentialité opératoire est scandée par la suite de ses événements. Chacun d'entre eux, comme chaque composante de l'activité, demeure distinct et disjoint du précédent ou du suivant et l'on ne peut en général pas trouver systématiquement un noyau d'activité qui se situerait entre deux autres ; nous admettons donc que le discret caractérise cet autre aspect : *ce qu'est* l'expérience et comment elle se déroule (et non plus qui la fait).

Par contraste avec ce qui se passe dans le domaine du vécu, le domaine de l'activité de pensée ne se dédouble pas de cette façon : il existe une sorte d'homogénéité structurelle abstraite qui, tout en

jouant des types d'ordre (continus, denses, discrets, mixtes) dans la puissance du continu, ne se catégorise pas (au moins en première approximation) selon leur nature et demeure formelle.

## 2.2. Caractérisations

### 2.2.1. Remarques préliminaires

Le paragraphe que nous abordons est un des plus délicats. En effet, il s'agit de mettre en rapport des entités mathématiques précises et bien définies (les types d'ordre), avec des catégories plus ou moins empiriques censées caractériser, classer et représenter la quasi-totalité des phénomènes humains. La question qui se pose d'emblée est celle de l'arbitraire éventuel d'une telle catégorisation qui semble avoir résolu le problème avant même de l'avoir complètement formulé : pourquoi ces catégories et pas d'autres, pourquoi ce découpage, etc. En fait, il ne nous est pas possible d'argumenter rigoureusement en faveur des choix que nous opérons ; les arguments que nous pouvons proposer sont eux-mêmes empiriques, fondés sur une réflexion plus philosophique que proprement scientifique, sur un acquis de tradition plus que sur une construction formelle [4]. Ce qui en soi n'a rien d'étonnant, puisque l'enjeu de l'entreprise est justement de parvenir à une telle formalisation qui permette ensuite de constituer une objectivité.

Si nous voulions faire une comparaison, nous dirions que nous nous trouvons un peu dans la situation d'avoir, par exemple, à formuler une loi de chute des corps, avant même de savoir si le concept de corps "en général" (indépendamment de sa forme ou de sa substance) est fondé et en admettant qu'une telle loi dans le vide a un sens (et quel que soit le lieu de son utilisation), alors que la variabilité des comportements des corps pesants dans des milieux réels (air, eau...) semble jeter le doute sur la possibilité d'un comportement générique. Pour parvenir à construire une objectivité relative à la chute des corps, il faut donc opérer un coup de force conceptuel (dont le succès ne peut être garanti *a priori*), qui catégorise et classe les variabilités, tout en posant que la généricité ainsi dégagée est mathématiquement formalisable. La théorie se révèle fautive si la catégorisation est inexacte (si l'induction généralisante est infondée) ou si la formalisation est inadéquate. L'important est que l'on puisse dégager des critères qui permettent de tester, en la vérifiant souvent ou en la réfutant ne serait-ce qu'une fois, la théorie proposée. Bien entendu, la difficulté peut résider aussi dans la possibilité d'élaborer de tels tests, soit que le champ de l'expérimentation ou de l'observation reste encore inaccessible, soit que la théorie ait tendance à s'auto-immuniser contre toute remise en cause et devienne irréfutable (tout en pouvant être complètement non pertinente). Le champ des phénomènes humains est particulièrement sensible à ces difficultés, aussi n'est-ce qu'avec circonspection - et sous réserve de contrôles ultérieurs, théoriques ou empiriques, dans l'observation effective ou dans la cohérence formelle - que nous avançons les propositions qui vont suivre.

### 2.2.2. Catégorisations conceptuelles du champ des phénomènes humains

Les catégories seront conçues comme des *coefficients* constitutifs du champ des phénomènes, appartenant à différents domaines ou permettant la transition entre eux. Ces coefficients seront considérés de façon plus dynamique que statique, c'est à dire définis non seulement par leur identité mais surtout par le mouvement de leurs rapports mutuels - grâce à quoi cette identité prend sens et se thématise. Un peu à l'image des concepts théoriques dont les rapports (oppositions, renforcements, enchaînements...) jouent un rôle au moins aussi important que leur stricte définition (dont on sait d'ailleurs qu'elle se fait le plus souvent de façon implicite, axiomatiquement et à travers le tissu de significations qui leur confère leur statut et à partir des rapports entre les indéfinissables du champ conceptuel considéré).

Procédons domaine par domaine, sans oublier de considérer aussi les conditions de passage entre eux.

(i) Passons rapidement sur le domaine de la maîtrise, dont nous avons déjà postulé qu'il ne comportait qu'une catégorie unique qui se confondait avec lui (à quoi correspond l'identification entre cardinal et ordinal dans le domaine du fini) ; cette catégorie, inhérente au domaine, est celle du *pouvoir* (ou encore, de la domination).

(ii) Le domaine du vécu relationnel (cardinalité infini dénombrable) sera, évidemment, le plus riche. Il comprendra cinq coefficients proprement constitutifs plus une sixième catégorie qui assurera la transition entre lui et le domaine de la maîtrise. Du fait que son rôle est transitionnel, cette catégorie sera plus conçue comme un *opérateur* que comme un coefficient au sens que nous avons donné à ce terme (la même situation se reproduira plus tard, dans des conditions un peu différentes, lorsqu'il faudra considérer le passage du domaine "vécu" au domaine "pensé").

Détaillons un peu en nous aidant du schéma 1.

#### SCHEMA MANQUANT.

Les coefficients seront, respectivement :

**A** : La catégorie de la naissance, que l'on considérera comme paradigmatique de tout ce qui est surgissement et innovation d'une part (relativement à la position du sujet), de tout ce qui est associé au don et à l'expression d'une générosité d'autre part (relativement aux opérations liées aux rapports entre sujets).

**B** : Par contraste, la catégorie de l'histoire, paradigme de l'immédiate mise en situation du sujet dans une lignée (culturelle, politique, théorique...) où il s'insère, d'une part, et d'autre part des résistances, rigueurs et difficultés à quoi il est conduit à s'affronter de ce fait.

**C** : La catégorie de la sexuation, jeu affectif et physique de la relation duelle entre protagonistes distincts (sexués), appelés à se rejoindre et à former une intimité fondée sur un échange où le sentiment tient la plus grande part.

**D** : La catégorie de l'économique ; l'échange est repris mais thématiqué dans le registre des biens plus que dans celui des personnes; les identités des agents perdent beaucoup de leur pertinence et de leur consistance. D'une certaine façon ce coefficient est au précédent ce que **B** était à **A**.

**E** : La catégorie de la coexistence, qui certes renvoie à la question de la violence meurtrière, mais qui, plus essentiellement, joue sur la capacité de rendre compatibles les quatre coefficients précédents qui semblent devoir écarteler le domaine relationnel et qui constituent pourtant son identité. Ce coefficient est donc de nature assez différente de celle des premiers : beaucoup plus formel, il se définit principalement par son rôle de contrôle et de régulation de leurs rapports ; il est en quelque sorte ce qui permet de trouver quelque chose de commun entre eux, alors même que leur compatibilité reste hautement problématique.

**F** : Enfin, en position limitrophe, en bordure du domaine, la catégorie du couplage entre le domaine du vécu relationnel et celui de la maîtrise effective ; un opérateur qui peut faire que l'exercice du pouvoir soit, ou non, animé et orienté par le souci relationnel plus que par d'anonymes fonctionnements institutionnels ; que les appareils soient tournés, ou non, vers l'accomplissement humain.

Sans nous étendre outre mesure sur ce qui pourrait faire l'objet de longues digressions, de genres très variés, nous gloserons rapidement ce tableau avant de définir les grandeurs ensemblistes correspondantes.

**A** et **B** constituent les deux pôles d'un niveau relativement abstrait du vécu relationnel que reprennent à un autre niveau, plus concret, **C** et **D**. Le premier niveau peut être considéré comme ce qui s'acquiert, effectivement, mais aussi en tant que principes, dans le cadre originare de l'"*individualo-parental*", tandis que le second niveau modalise ces acquis et ces principes dans le domaine plus collectif de la *relation sociale* (même si c'est toujours de rapports interpersonnels qu'il s'agit).

Selon un point de vue complémentaire, **A** et **C** représentent le côté créatif, tendre et accueillant du domaine relationnel, alors que **B** et **D** en représentent le côté dur et menaçant, la nécessité historico-économique.

La question de l'articulation entre individuel et social, entre innovation et poids des nécessités, est donc cruciale pour que le domaine trouve sa plénitude et s'unifie ; c'est ce que représente **E**, dont le rôle est moins d'apporter un surplus de contenu, que d'assurer les coordinations caractérisant l'identité du sujet (individuel et collectif) et son authenticité. C'est pourquoi l'on peut considérer que ce coefficient présente une vacuité spécifique et intervient pour permettre et orienter la "densification" de chacun des autres et, par conséquent, du domaine lui-même.

Enfin, la constitution d'identités, l'établissement de relations humaines, resteraient un processus incomplet si la question de leur retranscription dans la sphère du pouvoir n'était pas posée et ce, d'un double point de vue. Le point de vue selon lequel les conduites de domination et de maîtrise menacent les acquis relationnels (anonymats contre identités, fonctionnements aveugles contre choix délibérés...), et le point de vue inverse selon lequel ces acquis sont appelés à investir et normer le domaine de la maîtrise (dont l'autonomie n'est pas en cause, mais dont les régulations demeurent problématiques). C'est ce que représente l'opérateur **F**, médiation indispensable (le relationnel ne saurait être en prise directe sur les fonctionnements) et en même temps protection nécessaire contre les pertes d'identité "institutionnelles". Le rôle de cet opérateur est bien de couplage et de circulation entre ces deux domaines.

(iii) Le domaine du pensé se présentera assez différemment (schéma 2).

#### SCHEMA MANQUANT.

Il sera constitué de deux coefficients stables et d'un troisième qui pourra se présenter selon deux figures distinctes en fonction de l'approche que l'on en fera, à savoir : comme coefficient proprement dit ou comme opérateur de couplage avec le domaine du vécu relationnel. Commençons par les deux premiers.

**G** : La catégorie (intentionnelle) de l'**intelligibilité**, en tant que capacité à comprendre ou à être compris. On est encore dans la possibilité, la virtualité de compréhension, ce par quoi peut se manifester une rationalité et ce par quoi elle se constitue (on en trouverait une analogie, quant au langage, dans la parole qu'on énonce ou qu'on écoute).

**H** : La catégorie (matricielle) de la **formalité** (ou de la formalisation), qui circonscrit, met en forme opératoire, détermine, l'intelligibilité pour la rendre accessible et traitable, effective et transmissible : déterminations langagières, évidemment, mais aussi déterminations formelles et théoriques (l'analogie serait, cette fois, avec le texte qu'on écrit ou qu'on lit).

Le troisième coefficient se percevra sous deux formes :

La première, **I** : La catégorie de la pensée comme telle, en tant qu'elle est autonome, non déterminée, évoquant la source de la volonté et du dessein. C'est un secteur de totale vacuité, par quoi la pensée créatrice est possible et ne se clôt pas, une ouverture par quoi la liberté peut trouver lieu (mais hors du schéma de phénoménalité lui-même) et s'exercer.

La seconde, **I'** : La catégorie de la pensée, toujours, mais en tant qu'elle est féconde, cette fois, c'est-à-dire en tant qu'elle vise à comprendre et façonner l'existence humaine et son paysage. **I'** intervient alors comme opérateur de transition entre domaine pensé et domaine relationnel. Cette pensée se présente alors sous l'aspect de la *connaissance*, expression du couplage entre intelligibilité et formalité (**G** et **H**), orientée vers le domaine relationnel, selon le jeu des déterminations, cette fois.

Après ces brèves approches conceptuelles, venons-en maintenant aux correspondances formelles.

### 2.2.3. Correspondances formelles des catégories

Reprenons l'analyse domaine par domaine et catégorie après catégorie, en suivant la même disposition que celle que nous venons de présenter.

(i) L'ordinal fini, confondu avec le cardinal fini (**n**) du domaine de la maîtrise, codera la catégorie du pouvoir, coextensive au domaine.

(ii) Dans le domaine du vécu relationnel auquel on a associé le cardinal du dénombrable (*d*), la situation est moins simple. Non seulement il faut définir les types d'ordre associés aux diverses catégories, mais en plus il convient de réaliser le dédoublement que nous avons déjà évoqué entre la position du sujet proprement dit et ses opérations. En ce qui concerne le sujet, nous retiendrons les types d'ordre denses et pour les opérations, nous retiendrons les types d'ordre discrets. Les raisons de ces choix ont déjà été mentionnées (rappelons seulement qu'il s'agit de rendre compte, d'un côté de la permanence du sujet - entre deux états du sujet il existe toujours un autre état de ce sujet -, et de l'autre côté de la discontinuité des actions et opérations qui lui sont associées).

Pour procéder aux affectations, nous remarquerons qu'il existe dans le dénombrable exactement quatre types d'ordre denses. Le premier sera noté *h*, c'est un type d'ordre dense sans premier ni dernier terme (il est équivalent à l'ensemble des rationnels de l'intervalle  $(0, 1)$ <sup>1</sup> dans leur ordre naturel. Le second est sans premier terme mais avec un dernier terme et il sera noté *h + 1*, équivalent aux rationnels dans  $(0, 1>$ . Le troisième,  $1 + h$ , a un premier terme, mais pas de dernier (cf.  $<0, 1)$ ). Le quatrième, enfin,  $1 + h + 1$ , a un premier et un dernier terme (cf.  $<0, 1>$ ). Le passage d'un type d'ordre dense à un autre peut donc se symboliser par un jeu d'ouverture ou de fermetures pour l'ensemble de référence (les rationnels de l'intervalle).

Nous nous servirons de ces quatre types d'ordre pour caractériser formellement les catégories **A**, **B**, **C**, **D**, respectivement, considérées du point de vue du sujet. Considérées du point de vue des opérations, on introduira les types d'ordre discrets qui présentent des points communs relativement à l'ouverture et à la fermeture (existence de premiers ou de derniers éléments). En procédant systématiquement à partir du nombre ordinal  $w^2$ , on formera respectivement  $w + *w$ ,  $w$ ,  $*w$ ,  $*w + w$ , que l'on associera, par dualité (relativement à l'existence de premier ou dernier termes), à ces mêmes catégories. Ainsi, on obtiendra les doubles affectations suivantes :

$$\mathbf{A} \leftrightarrow \{h; w + *w\}, \mathbf{B} \leftrightarrow \{h + 1; w\}, \mathbf{C} \leftrightarrow \{1 + h; *w\}, \mathbf{D} \leftrightarrow \{1 + h + 1; *w + w\}.$$

Tentons, ne serait-ce que de façon analogique, de justifier ces choix.

Relativement à lui-même, le sujet surgissant, en **A**, n'a l'expérience intime ni d'une origine, ni d'une fin : il est subjectivement étranger à son début comme à son terme, les extrémités de sa vie (sa naissance, sa mort) lui sont externes ; bien qu'encadré entre ces deux bornes qui constituent des points limites, il s'apparaît à lui-même comme dépourvu de premier comme de dernier terme, d'où le type d'ordre correspondant, *h*. En revanche, du point de vue des opérations dont il peut être le siège ou qu'il déploie, en tant qu'une objectivité à son égard se trouve engagée, c'est au contraire dans un "espace" bien délimité qu'il évolue, pourvu d'un début et d'une fin qui le bornent et le circonscrivent : il est né et il mourra, par conséquent son action a eu un commencement et elle aura un achèvement, quand bien même l'entre-deux lui apparaît potentiellement inépuisable et que ses choix ne soient, en principe, pas limités ; situation qu'évoque la structure d'ordre de  $w + *w$ .

A l'inverse, en **B**, le sujet historique, s'il se sait n'avoir pas de premier terme (son origine se perd dans le passé de sa lignée individuelle ou collective), n'échappe pas à la clôture que constitue sa fin individuelle, dernier terme pour lui de sa présence historique, dans la mesure même où il vit en l'absence de ses propres ancêtres. Au contraire, les opérations qui le concernent ou dont il est lui-même la source, connaissent un commencement en ce qu'il est lui-même historiquement apparu, du

<sup>1</sup> Les parenthèses : ], ou : [, indiquent l'ouverture de l'ensemble ; les crochets : <, ou : [, indiquent la fermeture.

<sup>2</sup> Sa notation usuelle est *oméga* (noté ici *w*), il correspond au type d'ordre des entiers naturels pris dans leur ordre croissant {1, 2, ...} (bon ordre) ; l'ordre inverse {..., 2, 1} est noté  $*w$ .

point de vue factuel où s'inscrivent ces opérations, mais la perspective offerte à leur portée dépasse sa propre fin : il modifie l'état de fait pour l'avenir, il agit au regard de ses successeurs.

A la sexuation du sujet, en **C**, est associée le sentiment de sa fin propre (dualité subjective de l'amour et de la mort), que thématise le rapport à l'altérité à quoi il se conjoint ; ce que symbolise l'existence d'un dernier terme : lui-même se clôt en même temps qu'il se complète dans l'unification de la relation dont une des propriétés est précisément de clore et d'unifier une intimité duelle. Par contraste, c'est l'illimitation, la fécondité à quoi ouvre cette relation, qui apparaît du point de vue de la mise en oeuvre et de la mise en perspective opératoire (pas de dernier terme de l'ordinal discret). En même temps, cette relation prend appui sur une origine assignable et datée, par rapport à laquelle il y a effectivement un avant et un après (premier terme).

Enfin, en **D**, le sujet est enfermé dans son rôle d'agent économique ; il demeure en permanence sous la menace de la perte de l'identité, de l'interchangeabilité avec d'autres agents économiques, sous la menace de se trouver lui-même réduit à une marchandise et par là de se trouver enclos de toute part. Ses opérations, au contraire, se déploient dans une région illimitée : à l'échange en tant que tel (effectif ou symbolique) il n'y a ni premier ni dernier terme ; il s'agit d'une circulation dont on ne peut indiquer aucun commencement, ni aucun achèvement.

Si, après ces brefs commentaires, nous cherchons de la même façon à caractériser E, il apparaît immédiatement que sa spécificité rend la tâche plus difficile. En tant qu'il est vide, ce coefficient ne peut se caractériser par un type d'ordre stable qui le déterminerait comme sont déterminés les autres coefficients; en tant qu'il doit assurer la compatibilité de ces coefficients distincts, il doit signaler ce qu'il peut y avoir de commun entre eux. Le plus direct est d'attribuer à ce coefficient le cardinal même du domaine qu'il unifie, **aleph<sub>0</sub>**. En effet, la cardinalité tranche avec l'ordinalité tout en y participant<sup>1</sup> : tous les types d'ordre considérés jusqu'à maintenant s'inscrivent dans la cardinalité dénombrable qui constitue leur point commun et, relativement à l'ordre, le cardinal est vide tout en unifiant, caractéristiques que nous cherchons précisément à traduire.

Considérons enfin le coefficient **F**, que nous avons présenté essentiellement comme un opérateur de couplage entre le domaine du dénombrable et celui du fini. Son statut particulier appelle une analyse un peu plus longue et approfondie, d'autant que, comme nous le verrons, sa nature et son existence sont directement liées à l'axiomatique ensembliste elle-même (axiome de l'infini, cf. chapitre XV).

Commençons par une remarque. Le passage dans le transfini d'une cardinalité à une autre ne pose pas de grandes difficultés : l'axiome des parties d'un ensemble ouvre la voie à l'utilisation de la procédure qui consiste à former cet ensemble, dont la cardinalité est strictement supérieure à celle de l'ensemble de départ. Il n'en va pas de même dans le passage entre fini et transfini : d'une part l'ensemble des parties d'un ensemble fini demeure fini et, d'autre part, l'axiome de l'infini ne permet pas de définir une procédure de formation d'un ensemble infini à partir du fini. A ces différences correspond d'ailleurs la classification par Cantor des types d'ordre et nombres en classes I et II (pour la phénoménologie de l'humain, on pourra trouver là l'expression d'une dénivellation fondamentale entre l'existence placée sous le signe de la maîtrise réifiante et instrumentalisante et l'existence placée sous le signe du relationnel intersubjectif ou du spéculatif : la socialisation relationnelle ou culturelle est incommensurable avec les mécanismes et institutions qui visent à l'assurer).

La caractérisation d'un "opérateur" d'infinisation (ce terme, pour le distinguer de l'opération d'induction transfinie) à partir du fini ou de "troncature" dans une suite infinie discrète<sup>2</sup> ne va donc pas du tout de soi. Poser l'axiome de l'infini (cf. chapitre XV) garantit une existence mais ne fournit pas un

---

<sup>1</sup> On sait qu'un cardinal peut aussi être considéré comme le plus petit nombre ordinal de cette cardinalité. On pourrait dire de façon imagée qu'il présente ainsi le "prototype" minimal du bon ordre d'une cardinalité donnée.

<sup>2</sup> Vu sous cet angle, cet opérateur privilégie les nombres ordinaux (la troncature d'un segment initial suffit à donner une suite finie) et exclut l'action sur les ensembles denses ; cette parenté plus grande entre le fini et les types d'ordre discrets peut évoquer, dans le secteur de la phénoménologie humaine, un lien plus étroit entre les mécanismes de pouvoir et les opérations conduites par le sujet (types d'ordre discrets), qu'entre ces mêmes mécanismes et les caractérisations propres du sujet (types d'ordre denses).



moyen de passage ; concevoir l'opérateur reviendrait-il alors à le connecter avec l'acte d'abstraction qui consiste à poser l'axiome<sup>1</sup> ? Peut-être faut-il revenir à la façon dont fut conçu par Cantor l'ordinal  $w$ , dont le caractère spécial provient aussi du fait qu'il est un nombre limite (qui n'a pas de prédécesseur immédiat) : c'est le premier nombre ordinal transfini. Il s'agit, après avoir construit d'abord les ensembles  $W_n = 0, 1, 2, \dots, n-1$ , à passer à la *totalité* en définissant  $w = 0, 1, 2, \dots$  dont tous les éléments sont des nombres plus petits que  $w$ . L'acte de collectivisation totalisante d'un ensemble incomplètement déterminé dans son extension constitue le *passage à la limite* d'un processus d'induction. C'est à ce passage à la limite que renvoie l'opérateur en question.

Cependant il est une autre façon d'aborder la difficulté qui, sans nécessairement la résoudre, peut se révéler éclairante.

Posons-nous la question : l'opérateur d'infinisation est-il réellement un "opérateur" ou se présente-t-il, plus abstraitement, surtout comme un facteur d'intelligibilité ? Admettons un instant qu'il ne s'agisse pas de procéder opératoirement à une énumération illimitée (ou à une troncature dans une suite illimitée qui serait donnée *a priori*), mais plutôt de caractériser formellement une situation qui puisse tenir à la fois du fini et de l'infini.

Pour procéder à une telle analyse nous emprunterons alors à la conceptualisation associée à l'analyse non standard, déjà évoquée, tout en rappelant que l'approche en compréhension de la théorie des ensembles ne se confond pas avec une démarche de prise en considération d'un modèle non standard et ne saurait *a fortiori* s'y réduire.

Rappelons que la mathématique non standard permet de distinguer entre trois caractères (fini, formellement fini - tout en étant calculablement infini - et formellement infini) et non plus deux seulement (fini et infini). Notre point de vue nous conduit à privilégier ce concept intermédiaire de *formellement fini*. En effet, il tient du fini pour ce qui est de la caractérisation logique (aucune équipotence entre un tel ensemble et une de ses parties propres) et néanmoins du non fini pour ce qui est de l'appréhension intuitive, du sémantisme spontané et de la calculabilité (du fait de la présence d'entiers infiniment grands dans de tels ensembles, ils ne sont pas calculablement, ni récursivement finis). On notera que le caractère formel qui assure la finitude est associé à l'existence d'*applications* entre ensembles (les bijections qui permettent de comparer les puissances d'ensembles), opérations extérieures à la détermination interne de l'ensemble, tandis que les traits infinitaires sont relatifs au *contenu* de ces ensembles (par exemple l'ensemble des entiers plus petits qu'un entier infiniment grand donné  $N$  est formellement fini bien qu'il comporte une infinité d'entiers infiniment grands). Tous ces aspects font que ce coefficient de couplage peut être utilement considéré comme un ensemble formellement fini.

Phénoménologiquement parlant, par rapport à l'humain, on peut alors être tenté d'établir la correspondance suivante : pour les opérations avec le côté de la maîtrise (caractérisé par le fini au sens classique), dont on conçoit qu'on ne puisse circonscrire que formellement le rapport avec la dimension du vécu, et pour le contenu, au contraire, avec ce vécu qui, dans le modèle, ressortit au dénombrable. C'est dans ce double rapport que se concrétiserait le couplage et que se manifesterait l'"infinisation".

Nous pouvons même pousser un peu plus loin l'analyse en recourant explicitement, comme pour les autres coefficients, à l'usage des types d'ordre. En effet l'ensemble des entiers non standard présente un type d'ordre,  $v$ , assez particulier ; on a :  $v = w + (*w + w) h$ . Nous reviendrons plus précisément sur les opérations (addition et multiplication) entre types d'ordre dès le prochain paragraphe de ce chapitre et nous n'entrerons pas ici dans trop de détails. Il suffit de constater que  $v$  présente un segment initial équivalent à la suite des entiers naturels ( $w$ ), puis apparaît à sa suite une combinaison multiplicative entre type d'ordre dense ( $h$ ) (qui correspond à la succession des classes

---

<sup>1</sup> Ces considérations renvoient notamment, on l'aura remarqué, aux controverses engagées par les mathématiciens et logiciens intuitionnistes sur la constructibilité effective et reprennent d'une certaine façon l'ancienne distinction entre "infini en puissance" et "infini en acte". L'avancée récente de la mathématique non standard, que nous évoquons à nouveau plus loin, a justement redonné vigueur à ces discussions.

d'équivalence des entiers infiniment grands<sup>1</sup> et type d'ordre discret ( $*w + w$ ) (qui correspond à l'ordre des entiers relatifs à l'intérieur de ces classes d'équivalence). Une troncature dans le segment initial bien ordonné permet d'obtenir un nombre fini et il est tentant de faire correspondre ce "côté" de  $v$  au côté du domaine fini ; à l'inverse, le reste fait intervenir une combinaison de discret et de dense qui incite à la comparaison avec le côté du domaine dénombrable (du relationnel des phénomènes humains). Ainsi peut-on voir, de façon imagée, dans cet ensemble, une articulation qui corresponde au rôle de couplage que nous cherchons à faire jouer au coefficient qui lui est associé.

Dernière remarque, dans un registre plus général, sur cette question : il faut souligner le fait qu'une telle situation théorique (existence de modèles non standard et des propriétés afférentes) résulte de ce que la syntaxe ne *caractérise* pas complètement les objets : l'axiomatique (de Peano) n'est pas catégorique pour la logique du premier ordre. En transposant dans le secteur de la phénoménalité humaine, on pourrait dire que les *normes* ne suffisent pas à déterminer complètement la réalité phénoménale des conduites, ni à en rendre compte exhaustivement (possibilité de la transgression ou de l'innovation dans la relation).

(iii) Dans le domaine du pensé, enfin, auquel on a associé la cardinalité du continu ( $c$ ), nous aborderons les types d'ordre à partir de la considération des ensembles de points et de leurs propriétés et, évidemment, sous un angle principalement topologique. Le type d'ordre de référence que nous utiliserons sera  $y$  (les réels en ordre croissant dans l'intervalle  $(0, 1)$  ouvert) ; en effet, un théorème démontre qu'il est contenu (lui-même ou un type d'ordre isomorphe) dans tout ensemble continu.

Du point de vue des ensembles de points, à  $\mathbf{G}$  on associera un ouvert; en tant qu'ouvert non dénombrable il est dense en lui-même.

À  $\mathbf{H}$  on associera un fermé ; en tant que fermé non dénombrable (et dense en lui-même) il est parfait.

Un résultat établit que l'ensemble des points d'accumulation d'un ensemble non dénombrable est parfait; on considérera alors que l'ensemble associé à  $\mathbf{H}$  n'est autre que l'ensemble des points d'accumulation de l'ensemble associé à  $\mathbf{G}$  ( $\mathbf{H}$  étant parfait coïncide avec l'ensemble de ses propres points d'accumulation). Ainsi l'ensemble associé à  $\mathbf{H}$  est l'ensemble des points limites de l'ensemble associé à  $\mathbf{G}$  et l'opération qui consiste à passer de  $\mathbf{G}$  à  $\mathbf{H}$  se traduit par la construction de l'ensemble des points limites de l'ouvert.

Une telle situation évoque la caractérisation que nous avons faite plus haut du passage d'un "topos intelligible" (l'ouvert) à sa mise en forme effective, sa détermination, qui trace des limites là où il y avait virtualité (le fermé).

Sous l'angle des types d'ordre, l'ensemble associé à  $\mathbf{G}$  est mis en correspondance avec  $y$  et, comme fermé, celui associé à  $\mathbf{H}$  est mis en correspondance avec  $1 + y + 1$ . Le passage de l'un à l'autre revient à une double fermeture, l'une à droite (opération que nous désignerons par  $S$ ) et l'autre à gauche (opération  $R$ ). Nous reviendrons plus en détail sur ces opérations dans un instant, quand nous aurons considéré la caractérisation du coefficient  $\mathbf{I}$ .

En tant qu'il est vide et qu'il se présente quasiment comme l'expression d'une pure condition de possibilité pour  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{H}$ , et leur couplage, le coefficient  $\mathbf{I}$  joue dans ce domaine un rôle équivalent à celui que jouait dans le dénombrable le coefficient  $\mathbf{E}$ . De la même façon qu'à ce dernier nous avons attaché la cardinalité  $\aleph_0$ , pour des raisons semblables, nous attacherons à  $\mathbf{I}$  la cardinalité du continu ( $\aleph_1$ ). L'absence de type d'ordre renvoie à la vacuité, tandis que la cardinalité renvoie à ce qui est commun aux autres coefficients du domaine.

À la pensée autonome et non déterminée représentée par  $\mathbf{I}$ , on a aussi associé  $\mathbf{I}'$ , pour spécifier la fécondité de cette pensée et la connaissance qu'elle produit, c'est-à-dire pour exprimer l'opération de couplage entre  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{H}$  qui permet l'élaboration de cette connaissance. C'est donc à ce couplage (que

<sup>1</sup> Ici deux entiers infiniment grands sont considérés comme équivalents si la valeur absolue de leur différence est limitée (c'est-à-dire n'est pas infiniment grande).

représente ici la paire (**R,S**) des opérations de fermeture considérées plus haut) que nous allons nous intéresser principalement.

En effet, on peut faire correspondre au passage symbolisé par cette paire une classe d'opérations très "naturelles" (et qui ouvre par ailleurs à de grandes possibilités de calcul). Il suffit de recourir à des ensembles de *fonctions*, d'autant que l'ensemble des fonctions réelles continues sur (0, 1) possède la puissance du continu et, de ce fait, appartient au domaine considéré<sup>1</sup>.

L'intervalle associé à G peut être fermé en faisant opérer des fonctions appartenant à un ensemble dénombrable (ce qui introduit déjà un certain rapport avec le domaine dénombrable, et notamment avec le type d'ordre w). Ainsi, on passera de (0, 1) à (0, 1> (fermeture à droite, opération S) en faisant agir la suite dénombrable de fonctions :

$$n > 0 \quad z_n = 3/2^n - x \text{ pour } 1/2^n < x <= 1/2^{n-1} \quad (\text{d'où } 1/2^n < z_n <= 1/2^{n-1})$$

(Les signes  $\leq$  ou  $\geq$  signifient "inférieur ou égal" ou "supérieur ou égal", respectivement).

On pourra procéder de même pour R, de sorte qu'on peut ainsi passer des caractéristiques des ensembles associés à G à celles associées à H. Le couplage proprement dit sera représenté par la suite dénombrable des fonctions considérées (sous cet angle fonctionnel I pourra alors être considéré comme la puissance (c) des fonctions d'où procèdent ces suites).

### Commentaire aux paragraphes 1 et 2

Si nous cherchons à résumer la démarche que nous avons suivie, nous repérerons essentiellement trois mouvements.

Le premier jalonne le champ des phénomènes humains en caractérisant les domaines par leur *cardinalité* (continu, dénombrable, fini) et en posant les coefficients correspondants (I, E, n).

Le second ordonne et organise ces domaines en les catégorisant au moyen de *types d'ordre* compatibles avec ces cardinalités.

Le troisième, enfin, établit et analyse les rapports que ces domaines entretiennent entre eux au moyen des *opérateurs de couplage*.

Mais il s'agit là d'un point de vue analytique et rétrospectif : de fait, si l'on s'en remet à l'ontogenèse individuelle ou à l'histoire culturelle et sociale, les domaines ne se constituent que parce que les catégories s'y développent et que les couplages opèrent ; les trois mouvements sont toujours contemporains les uns des autres, même si l'on peut repérer des prévalences selon les âges de la vie ou de la société.

### 3. CALCULS ET OPERATIONS

Bien entendu, les règles de calcul entre cardinaux, nombres ordinaux, types d'ordre, que nous appliquerons seront exclusivement celles de la théorie des ensembles et nous n'y reviendrons qu'occasionnellement, pour simplifier la lecture. En revanche, il nous faut déterminer la nature de la correspondance entre ces règles et opérations ensemblistes et le traitement des significations dans le champ des phénomènes humains. C'est la question que nous allons maintenant aborder.

Pour commencer il faut souligner que les nombres que nous manipulons, et *a fortiori* les ordres, ne présentent pas du tout les mêmes propriétés que les nombres ordinaires des théories arithmétiques usuelles. Les opérations elles-mêmes sont fort différentes, même si l'on peut toujours parler d'addition ou de multiplication, par exemple (mais il n'y a ni opposés, ni inverses aux transfinis).

La combinatoire relativement limitée des cardinaux reflète la relative autonomie des domaines que nous avons distingués et la propriété la plus intéressante est liée à l'exponentiation (cardinal des

---

<sup>1</sup> L'ensemble de toutes les fonctions a une puissance  $f = 2^c$ , strictement supérieure à celle du continu, nous ne les considérerons pas ici.

parties) qui, dans le transfini, permet de passer d'un cardinal à un cardinal plus élevé, c'est-à-dire d'un domaine au suivant. Cette combinatoire est beaucoup plus riche pour les types d'ordre d'un domaine, c'est-à-dire pour le jeu des catégories correspondantes. C'est donc principalement de ce point de vue que nous considérerons les opérations.

### 3.1. Addition et consécution

L'*addition* des types d'ordre ou des nombres ordinaux revient à les séquentialiser en les juxtaposant et en les concaténant dans l'ordre indiqué par l'opération ; nous ferons correspondre à cette opération la *consécution* dans les phénomènes, qu'elle se manifeste de façon empirique et temporelle, ou causale et déterministe, ou abstraite et logique.

Les propriétés d'*associativité* de cette addition assurent la stabilité de la consécution quant à la façon d'en regrouper les segments, pourvu évidemment que leur ordre ne soit pas modifié. Mais, pour les types d'ordre, l'addition n'est en général pas *commutative* ; par exemple :  $1 + w = w \neq w + 1$  (rappelons que " $\neq$ " signifie "différent de"), ou :  $w + *w \neq *w + w$  ; ou encore, pour les types d'ordre dense,  $h + h + 1 = h + 1$ ,  $h + 1 + h = h$ , etc.

Cette propriété de non commutativité s'accorde bien avec la non commutativité générale de la consécution dans les phénomènes : le résultat de deux actions successives dépend, en effet, de l'ordre dans lequel on les effectue ; ou encore, la situation finale du sujet dépend de l'ordre dans lequel il a expérimenté les situations qui, se succédant, produisent et composent cette situation finale.

De même, l'ordre propositionnel n'est, en général, pas commutatif et le résultat de la consécution de deux propositions liées par un connecteur tel que l'implication dépend évidemment de l'ordre dans lequel elles se présentent par rapport au connecteur (ordre qui n'est d'ailleurs pas nécessairement celui dans lequel elles ont été énoncées).

En revanche, les lois d'addition des cardinaux sont commutatives, même si elles peuvent paraître bizarres : une somme finie de cardinaux transfinis est toujours égale au plus grand d'entre eux ("absorption", pour ainsi dire de tous les cardinaux transfinis inférieurs par le plus grand, à quoi correspond la prévalence du domaine le plus "abstrait" dans la consécution phénoménale, c'est-à-dire dans la transition entre domaines).

### 3.2. Multiplication et détermination

La *multiplication* des types d'ordre présente aussi de grandes différences par rapport à la multiplication ordinaire : si elle reste *associative*, en revanche, en général, elle n'est pas *commutative*, ni *distributive* par rapport à l'addition si c'est le premier facteur qui se présente sous la forme d'une somme, bien qu'elle le demeure si c'est le second facteur qui est une somme.

Ainsi, par exemple, pour les types d'ordre discrets (le "." indique l'opération de multiplication) :

- $2 \cdot w = w \neq w \cdot 2$  (pour la commutativité)
- $(w + 1) \cdot 2 = w \cdot 2 + 1$  (pour la non distributivité sur le premier facteur)
- $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$  (pour la distributivité sur le second facteur)

Si nous revenons aux définitions ensemblistes, nous constatons que la multiplication de deux types d'ordre revient à ordonner les *paires* d'éléments appartenant aux ensembles sur lesquels sont définis ces types d'ordre. Ainsi, le type d'ordre  $a \cdot b$  correspond à la mise en ordre de la paire  $(b_j, a_j)$ , avec  $b_j \in b$  et  $a_j \in a$  (le symbole " $\in$ " est le symbole d'appartenance ensembliste), de sorte que  $(b_1, a_1) < (b_2, a_2)$  si  $b_1 < b_2$  et, dans le cas où  $b_1 = b_2$ , si  $a_1 < a_2$  (ici, "<" signifie "précède").

Considérée sous un autre angle, la multiplication revient à *remplacer* les éléments, dans le premier ensemble, par des ensembles équivalents au second ensemble, en conservant les ordres. A cette multiplication correspond donc ce que l'on peut appeler un effet de *détermination* (associée à ces remplacements). Ce même effet de détermination est présent dans l'analyse phénoménale, sous une

forme comparable, et on peut le repérer dans le langage. En effet, c'est dans le secteur linguistique, avec la variété du jeu des déterminations qu'il comporte (adjectifs, propositions relatives, génitifs, etc.), que l'on peut tester le plus aisément la validité de la correspondance proposée.

Considérons par exemple l'expression "la naissance de l'histoire". On y note, évidemment, la non commutativité (cela ne renvoie pas du tout à "l'histoire de la naissance"). Par ailleurs, l'analyse montre que le déterminant vient effectivement spécifier l'abstrait du déterminé (que l'on peut alors considérer comme ensemble de places disponibles, à savoir les éléments de l'ensemble, en tant qu'ils ne sont pas eux-mêmes des ensembles).

On peut avoir des situations beaucoup plus compliquées, relativement à la distributivité de la détermination par rapport à la consécution, par exemple (*cf.* la multiplication par rapport à l'addition). On constatera alors qu'en effet la distributivité de la détermination est vérifiée le plus souvent sans difficulté par rapport à la concaténation dans le déterminé, mais qu'elle se révèle bien plus problématique (et souvent absente) par rapport à la concaténation dans le déterminant.

Prenons une illustration. Sans autre contextualisant, on a une assez bonne équivalence entre : "la maison et le jardin de Jean" et : "la maison de Jean et le jardin de Jean", mais pas du tout entre : "la maison de Jean et de Marie" et : "la maison de Jean et la maison de Marie" (on a l'impression de passer d'une maison à deux maisons).

De même, on a une assez bonne équivalence entre : "la maison et le hangar qui brûlaient" et : "la maison qui brûlait et le hangar qui brûlait" mais pas entre : "la maison qui brûlait et qui s'effondrait" et : "la maison qui brûlait et la maison qui s'effondrait" (on a l'impression de passer de une à deux maisons distinctes).

Notons, pour éviter toute confusion, que dans les cas pris comme exemples le déterminant correspond au premier facteur de la multiplication et le déterminé au second (attention au fait que l'ordre des éléments pris dans les paires est, conventionnellement, inverse !) ; évidemment, ces places (mais non ces fonctions abstraites de détermination) sont relatives aux langues étudiées et à l'intuition du phénomène qu'elles restituent.

La considération des types d'ordre dense offre une richesse aussi grande et une combinatoire considérable entre eux et avec les types d'ordre discrets ; par exemple, on aura :

$h. a = h$  ( $a$  : type d'ordre dénombrable ou fini  $\neq 0$ )

$(1 + h). a = 1 + h$  (si  $a$  a un premier élément)

$= h$  (si  $a$  n'a pas de premier élément)

etc.

Par souci de brièveté, nous ne commenterons pas ici ces dernières propriétés, mais il semble clair qu'elles peuvent être mises en correspondance avec des caractéristiques précises de phénomènes, notamment lorsqu'il s'agit d'articulations déterminatives entre positions de sujet (ordres denses) et opérations le concernant (ordres discrets).

#### 4. REMARQUES A PROPOS DE LA DETERMINATION DES "OBJETS"

##### 4.1. Considérations générales

Le prochain chapitre sera consacré à la présentation et à la discussion d'exemples plus précis et plus délimités que ne peuvent l'être les considérations assez générales et abstraites que nous avons développées jusqu'ici. Toutefois, avant de nous engager sur ce terrain, il nous semble indispensable de procéder à quelques remarques et mises au point concernant la nature de ce qui devient nos "objets" d'étude, qui ne sont plus des phénomènes à proprement parler - leur formalisation en témoigne -, sans être pour autant parvenus au statut complet de concepts théoriques ou de principes.

Insistons sur le point suivant : c'est la nature du **rapport** entre deux concepts abstraits relatifs aux phénomènes humains (ou entre deux caractères qualitatifs) qui fait la substance de la

correspondance avec les transfinis, et ce, dans la mesure même où un concept est lui-même déterminé par l'interférence entre deux concepts distincts (au moins). On pourrait trouver une analogie à cette situation dans l'analyse de la nature de la fonction qui relie deux grandeurs : dans la chute libre, la distance parcourue et le temps nécessaire à ce parcours sont mis en rapport par une opération d'élévation au carré (du temps). Cette élévation au carré ne constitue, bien sûr, aucun caractère qui appartienne en propre à l'une ou l'autre des grandeurs considérées, seulement un rapport, mais c'est en ce rapport principalement que se situe et que l'on repère la phénoménalité étudiée.

Il en ira de même ici : c'est dans les rapports établis entre phénomènes humains (qui sont eux-mêmes, le plus souvent, des rapports), ou entre qualités, que nous cherchons à repérer et à caractériser la phénoménalité qui nous importe. Ainsi convient-il de moduler les interprétations éventuelles de nos assignations ensemblistes : dire que l'on met en correspondance la catégorie de la "naissance", par exemple, avec le type d'ordre  $h$ , ne vise nullement à hypostasier et substantialiser le concept de "naissance". Cela vise seulement, à travers les rapports avec d'autres types d'ordre caractéristiques d'autres catégories, à restituer formellement (et, si possible, calculablement) ce que peut être la liaison entre la situation phénoménale de la naissance et d'autres situations fondamentales constitutives des phénomènes humains. De la même façon, à propos de l'usage des cardinalités, c'est moins la valeur comme telle d'une cardinalité donnée qui caractérisera intrinsèquement un domaine ou un phénomène, que le rapport entre diverses cardinalités (fini/transfini, un **aleph** par rapport à un autre) qui cherchera à restituer ce que peuvent être les rapports (d'abstraction, d'englobement, d'incommensurabilité...) entre domaines ou entre phénomènes. C'est d'ailleurs ce que nous verrons dès le prochain chapitre à l'occasion de divers exemples. Mais dès maintenant nous pouvons invoquer des expériences affectives ou intellectuelles pour illustrer ce point de vue.

Par exemple, lorsque l'on parle d'émotions, on sent bien que c'est la modalité de relation qui en constitue le substrat fondamental et non pas quelque substance réifiée et illusoire d'un sentiment qui serait objectivé. Ce n'est qu'abstraitemment d'une part, et relativement, d'autre part, que l'on peut isoler un tel sentiment à partir de la relation effective dont il dérive ou dans laquelle on a l'impression qu'il est investi comme tel. Du point de vue de la caractérisation subjective, aussi bien que de celui de la compréhension, c'est dans la relation que s'enracinent sentiments et émotions. Ils n'en sont pas des composants mais des dérivés ; c'est elle qui est première et "élémentaire", pourrait-on dire.

Mais c'est surtout dans l'analyse de la nature et des propriétés des champs conceptuels que de telles considérations peuvent trouver une place particulièrement illustrative. C'est ce que nous voulons aborder rapidement, d'autant que nous serons amenés à utiliser extensivement dans la suite certaines des remarques que nous ferons ici.

## 4.2. Champs conceptuels et cardinalités

Si, comme nous l'avons déjà indiqué, un concept est l'effet d'une interférence entre deux concepts distincts au moins (nous dirons deux, pour simplifier), nous pouvons expliciter cette caractéristique sous la forme suivante :

$$C^m_0 = K_1 (C^a_1, C^b_1)$$

où les  $C$  représentent des concepts, l'exposant distingue les concepts entre eux, l'indice correspond au rang de la relation et  $K_1$  exprime l'interférence (convergence, opposition, polarités...).

Dans le second membre de cette expression on peut réitérer l'opération d'explicitation et l'on aura :

$$C^a_1 = K_2 (C^p_2, C^q_2)$$

$$C^b_1 = K_2 (C^r_2, C^s_2)$$

et ainsi de suite<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Notons que, du point de vue logique, cette démarche revient à définir les concepts "par abstraction" et non d'une façon absolue. C'est également ce que nous avons tenté de faire à propos des phénomènes et de leurs correspondances avec les types d'ordre : nous avons évité de définir directement, et comme telle, une propriété abstraite mais nous avons cherché à expliciter à quelles conditions deux "entités" peuvent être tenues pour semblables ou équivalentes relativement à ce qui

On obtient ainsi une chaîne conceptuelle dont nous considérerons qu'elle caractérise un champ conceptuel. Ce sont les propriétés d'arborescence (graphe topologique) de cette chaîne qui détermineront principalement la nature formelle du champ conceptuel (en dehors de toute détermination sémantique de contenu et de signification des concepts eux-mêmes et de leur champ).

En effet, le processus de chaînage peut - ou non - atteindre un aboutissement, total ou partiel, si, à une étape donnée, l'expression des interférences K fait intervenir un ou plusieurs concepts C déjà utilisés antérieurement (une boucle peut ainsi apparaître dans le graphe).

Dans le cas d'une totale clôture sur elle-même de la chaîne (bouclage complet) après un nombre fini de pas, on dira que le champ conceptuel constitue une  *croyance*  ou une  *idéologie* .

Dans le cas où la chaîne, considérée comme ordinale - ou si elle comporte un nombre suffisant de cycles finis -, est de puissance du dénombrable (*d*), on parlera du champ conceptuel d'une  *science*  (pour lesquelles les explications existent mais ne ferment pas la perspective de connaissance et sont toujours sujettes à être critiquées, approfondies, reprises), ou encore d'un champ conceptuel de  *savoirs*  portant sur les rapports humains empiriques (dans lesquels on peut certes rencontrer des croyances et des idéologies, mais dont on accepte qu'ils soient inépuisables).

Enfin, dans le cas de la chaîne infinie de cardinalité continue (*c*), on aura un champ conceptuel correspondant à ce que l'on appellera une  *problématique* , en tant que reste ouvert, non seulement le champ d'investigation, mais encore l'interrogation sur le sens lui-même du problème et des investigations, interrogation sous laquelle se subsume toute la combinatoire des investigations possibles et des apports de diverses sciences.

Revenons brièvement sur ces caractérisations, en les rapprochant de la façon dont nous avons spécifié les domaines par leurs cardinalités et dont nous les avons mis en correspondance avec les phénomènes humains.

Le fait qu'une idéologie ou une croyance corresponde à un champ conceptuel caractérisé par le fini peut être associé :

(i) à l'aspect nécessairement autoréférentiel  effectif  (c'est-à-dire expérimenté dans le réel et pas seulement de principe) de l'idéologie ou de la croyance, qui doit finalement et effectivement renvoyer à elle-même et à rien qui ne soit elle-même, sous peine de perdre sa consistance, sa prégnance et son impact, c'est-à-dire, en quelque sorte sa fonction d'idéologie ou de croyance ;

(ii) à l'aspect tourné vers le contrôle et la maîtrise de ce pour quoi ou à propos de quoi, l'idéologie ou la croyance est développée ; que ce soit en vue de circonscrire, neutraliser ou traiter le secteur de réalité en question.

Par contraste, une science aura au contraire à correspondre à un champ conceptuel infini dénombrable. Ceci est dû, principalement à l'aspect nécessairement inépuisable et ouvert de l'activité investigatrice et explicatrice, qui demeure néanmoins située dans le paysage de l'opérateur (*cf.* les types d'ordre discrets). En même temps cette activité et ses résultats relèvent du développement d'un bon ordre effectif (et non pas seulement de sa possibilité de principe, comme pour la cardinalité continue), d'où la propension à l'associer aux nombres ordinaux. Cette situation n'est pas toujours celle qui l'emporte en matière de savoirs humains où, à côté de l'analyse objectivante, l'empathie joue un rôle important ; on aura alors tendance à prendre aussi en considération dans ce cas, des types d'ordre pas nécessairement bien ordonnés. En tout état de cause, le passage à la caractérisation infinitaire indique la prévalence de la rationalité sur les mécanismes.

---

apparaîtra ainsi comme cette propriété (comme on évite de définir la direction d'une droite, par exemple, mais plutôt, par la relation de parallélisme, ce qu'est, pour deux droites, que d'avoir la même direction). Démarche qui renvoie aussi à ce que nous avons souligné à propos des catégories, en cherchant à parler de leurs rapports plutôt que d'une nature qui leur serait intrinsèque.

Pour sa part, une problématique (au sens que nous avons retenu) renvoie à la puissance du continu. Par exemple les dichotomies fini/infini, continu/discret, ou local/global, sont des thèmes qui ont certes des répondants scientifiques (et pas seulement dans les mathématiques), mais qui ont aussi une pleine signification dans la philosophie, la poésie, etc. Ces dichotomies constituent en fait un domaine d'évocation stable et récurrent dans les préoccupations humaines de compréhension et de catégorisation du monde, dans la pensée sous ses diverses manifestations. La base en est effectivement fournie par le jeu combinatoire des sous-ensembles construits à partir d'ensembles déjà infinis dénombrables (auxquels se rattachent sciences et savoirs) et c'est cette combinatoire qui assure la puissance du continu à ces secteurs problématiques (non complètement algorithmisables comme peuvent l'être bien des problèmes techniques à résoudre).

C'est ce qu'illustre la réflexion philosophique qui, selon G-G.Granger [5], recourt au métaconcept (par contraste avec le caractère scientifique du concept à proprement parler). Le métaconcept traite les concepts en objets, les combine, les compare, les associe et, pourrions-nous dire, à partir d'un ensemble de cardinalité dénombrable (où ils vivent comme concepts scientifiques), les envoie faire sens dans un ensemble de la cardinalité du continu (par prise en considération de l'ensemble des parties). Cette démarche se redouble dans la constatation du fait que la science travaille sur la dualité opération/objet (lesquels doivent donc inciter et autoriser le "découpage" par l'acte), alors que le concept philosophique est à proprement parler sans objet (et n'est donc pas soumis à la détermination opératoire de la dénombrabilité) ; ce qu'indique indirectement G-G.Granger [5], à nouveau, lorsqu'il souligne la "*différence radicale de niveau d'expression<sup>1</sup> entre concept objectif et concept philosophique*" (thème, rappelle-t-il, du métaconcept). C'est bien cette différence de niveau qui pourrait trouver ici son expression dans une différence de cardinalité transfinie des domaines de correspondance.

## 5. CONCLUSION

Aux coefficients que nous avons décrits et analysés dans une approche que l'on peut qualifier de phénoménologique, nous avons donc pu faire correspondre des ensembles, des types d'ordre, des cardinalités, tels que ces derniers se révèlent capables d'en représenter les propriétés principales et les rapports opératoires qu'ils peuvent entretenir. Ce faisant nous avons rempli une partie du programme que nous nous étions fixé. Mais une telle correspondance n'est sans doute pas unique, pas plus qu'elle n'est, à ce niveau, biunivoque. Il nous suffit, à ce stade, qu'elle préserve globalement caractéristiques et relations des coefficients et surtout qu'elle offre l'avantage de ne plus être seulement illustrative ou évocatrice : elle se prête désormais au calcul - ce calcul particulier, propre à la théorie des ensembles - sans pour autant que soit rabattu sur du pur quantitatif ce qui relève aussi du qualitatif, ni qu'on soit incité à prendre indûment le modèle pour la réalité. C'est là un des avantages et des effets bénéfiques de nous être d'emblée situé dans une représentation infinitaire.

Nous reprendrons plus loin, au chapitre XV, les analyses épistémologiques et axiomatiques qu'appellent la correspondance que nous avons établie et les questions qu'elle suscite. Notamment, la question de savoir si l'on peut faire correspondre à l'axiomatique fondatrice de la théorie des ensembles (ZFC), des éléments principiels - principes régulateurs, voire constitutifs - pour l'analyse et le traitement des phénomènes humains eux-mêmes et pour la construction de leur objectivité. Pour l'instant, et pour conclure momentanément sur le corpus que nous venons de présenter, nous voudrions prendre une comparaison qui, bien que très approximative, peut s'avérer éclairante. On pourrait dire qu'avec ces coefficients, d'une part, ces types d'ordre, d'autre part, on s'est attaché surtout à définir et caractériser un *système de coordonnées*, par rapport auquel on cherche à repérer les phénomènes humains. De même que la géométrie analytique permet de traiter de formes et de propriétés proprement géométriques au moyen de nombres, d'algèbre, de fonctions, de même que les nombres de Gödel permettent de repérer et d'analyser des formules et structures logiques de façon "calculable" en termes arithmétiques, il deviendrait possible, par la correspondance avec les types d'ordre, de repérer, d'analyser, voire de "calculer", des phénomènes humains dans ce système de coordonnées et de variables que constituent les coefficients et leurs types d'ordre associés.

---

<sup>1</sup> Souligné par l'auteur.



### REFERENCES DU CHAPITRE XIII

- [1] G. FREGE, *Ecrits logiques et philosophiques*, Seuil, Paris, 1971.
- [2] A.A. FRAENKEL, *Abstract Set Theory*, Acad. Press, Londres, 1978.
- [3] E. KAMKE, *Theory of sets*, Dover, 1970.
- [4] J. ZACKLAD, *Pour une éthique*, Tome I, Verdier, Lagrasse, 1979, Tome II Verdier, 1981, Tome III, Textes et Travaux, 1985.
- [5] G-G. GRANGER, *Pour la connaissance philosophique*, Odile Jacob, Paris, 1988.