CHAPITRE XV

CORRESPONDANCES AXIOMATIQUES. STATUT EPISTEMOLOGIQUE

> "<...> *l'axiomatique, en décelant les analogies formelles, révèle des correspondances insoupçonnées entre divers domaines d'une même science, et même des parentés entre des sciences qui semblaient étrangères. En dégageant la structure invariante*[1] *commune à des théories apparemment hétérogènes, elle permet de les dominer par la pensée et d'embrasser du regard, en une vue plus synthétique, de vastes paysages intellectuels qu'on ne connaissait encore que par fragments*."
>
> R. Blanché [1]

Dans les chapitres précédents de cette TROISIEME PARTIE nous avons présenté les correspondances formelles et leurs propriétés et nous avons discuté d'exemples d'applications possibles de ces correspondances. Pour ce faire, nous avons largement eu recours aux contenus théoriques et conceptuels de la théorie des ensembles et de la théorie des modèles. L'intérêt de ces théories, cependant, ne se limite pas au contenu qu'elles proposent, ni aux propriétés qu'elles permettent de dégager et d'utiliser ; elles-mêmes font appel à des fondements axiomatiques à partir desquels elles se construisent et qui contribuent à les caractériser (passage de la théorie "naïve" des ensembles à sa théorie axiomatique). À des choix axiomatiques particuliers correspondent des ensembles de propriétés différentes ou des problématiques distinctes quant aux difficultés à surmonter ou quant aux centres d'intérêt conceptuel mis en valeur (axiome de réductibilité et de constructibilité par rapport à une théorie des ensembles constructibles, par exemple).

On peut alors se demander si l'extension de ces correspondances entre contenus (des phénomènes humains aux transfinis) à des correspondances avec cette armature axiomatique conserve un sens et lequel. Peut-on interpréter en termes théoriques ou épistémologiques, relatifs aux phénomènes humains, les fondements des théories des ensembles, c'est-à-dire les axiomes eux-mêmes ? C'est la question que nous voulons aborder dans ce chapitre en nous limitant toutefois à la structure axiomatique la plus classique, celle de ZFC dans sa version la plus courante (nous avons placé en Appendice certains aspects plus spécifiquement logiques dont nous avons fait usage, sans nécessairement les expliciter, au cours de l'analyse).

Auparavant, toutefois, nous nous livrerons à quelques considérations de nature plus épistémologique qui permettront d'enrichir la discussion à ce propos.

1. CONSIDERATIONS EPISTEMOLOGIQUES

Rappelons tout d'abord que, malgré l'usage quelque peu instrumental que nous en avons fait nous-mêmes, la correspondance entre phénomènes humains et théorie des ensembles vise autant à introduire un paradigme de référence pour l'élaboration d'une intelligibilité qu'à se présenter comme un instrument théorique possible pour la construction d'une objectivité.

De ce point de vue, on avait trouvé un avantage épistémologique certain - pour représenter et modéliser des phénomènes humains - dans le recours aux ensembles infinis et à leurs propriétés, du fait, notamment, que l'on disposait ainsi d'ensembles qui pouvaient être équivalents à certaines de leurs parties propres.

---

[1] Souligné par l'auteur.

On peut y trouver un deuxième avantage épistémologique, au moins aussi important et qui peut-être, à un niveau profond, est lié au premier : en effet, avec cette représentation nous disposons de correspondances "calculables", telles que l'implication de l'observateur (ou du sujet épistémique) dans l'objet étudié - ou son interaction avec lui - ne constitue plus un obstacle à un savoir objectif. C'est ce que nous voulons examiner maintenant.

1.1. Rapports entre l'observateur et son objet

En matière d'analyses de phénomènes humains plus qu'en toute autre, l'observateur interagit avec son objet ; néanmoins, il peut le perturber gravement ou le laisser stable, selon les conditions dans lesquelles se place cet observateur. Notre système de correspondance permet de rendre compte de telles situations et de les discerner formellement.

En effet, d'une part, on devra concéder que la caractérisation phénoménale de l'observateur lui-même, dans son activité épistémique (qu'elle soit réflexive ou non), peut être mise - *via* la correspondance ensembliste - en rapport de comparaison, voire d'équivalence, avec les phénomènes que l'observateur analyse et étudie, et dont il cherche à construire, ensemblistement aussi, l'objectivité : il peut s'agir de cardinalités identiques, de types d'ordre comparables, etc. On verra donc là une manifestation flagrante de l'implication possible de l'observateur dans son objet qui, en l'occurrence, renvoie, d'une part, au fait que la construction de l'objectivité est aussi un phénomène humain et, d'autre part, que les phénomènes pris en compte peuvent aussi concerner, par leur nature, l'observateur qui les prend en compte.

Mais, d'un autre côté, du fait que nous travaillons avec des ensembles infinis, les interférences et perturbations apportées par l'observateur et par sa co-participation à ses objets d'étude, ne bouleversent pas nécessairement la représentation abstraite de leur texture ensembliste et de leurs rapports. Ainsi, par exemple, l'addition ou la multiplication d'une cardinalité dénombrable par une autre laisse stable cette cardinalité, ce que nous pouvons commenter en disant que l'"addition" ou le "produit" de deux domaines ne modifie pas nécessairement la nature de ces domaines (cette situation se rencontre soit si les deux domaines ont même cardinalité, comme dans l'exemple que nous avons pris, soit si le domaine observé est de cardinalité supérieure à celle du domaine "perturbateur" et en ce cas, c'est ce dernier dont la cardinalité se voit modifiée par les opérations). De telles propriétés ne pourraient plus être vraies si nous avions dû recourir à des nombres finis pour caractériser ce que nous voulions désigner. Dans certains cas (liés aux opérations que nous avons détaillées au chapitre XIII) il en va de même pour les types d'ordre. Mais, bien entendu, ces stabilités des objets sous l'observation ne sont pas vérifiées dans tous les cas et il convient d'accorder toute son attention à la "force" relative de la perturbation apportée par l'observation. Si nous reprenons l'exemple que nous avons déjà pris, il pourrait se traduire en disant que le fait de considérer des situations existentielles à partir de situations existentielles propres à l'observateur, ne modifie pas la nature existentielle du domaine d'observation (même si l'interférence peut y modifier les types d'ordre, c'est-à-dire le jeu des catégories, ce qui resterait à examiner). En revanche, si la perturbation avait consisté à aborder l'existentiel sous un angle purement spéculatif (puissance du continu), les opérations d'interaction auraient modifié la nature du domaine observé en le surdéterminant par le spéculatif (analyser de façon déterminante à partir de pensées *a priori*, au lieu de laisser la détermination aux faits existentiels étudiés, eux-mêmes. Les événements ont du mal à s'imposer à la représentation, pourrait-on dire).

Dans le cas des types d'ordre l'association, dans un domaine donné, de types d'ordre provenant de l'observateur à ceux issus de l'objet d'étude peut, ou non, modifier ce dernier selon, par exemple, l'ordre des interactions. Ainsi (et en notant entre parenthèses les caractéristiques de l'observateur), on aura :

$$(h + 1) + h = h \quad \text{(A)}$$

et :

$$h + (h + 1) = h+1 \quad \text{(B)}$$

Dans le cas (A), on a laissé la prévalence au type d'ordre de l'"objet" et c'est lui encore qui sort de l'interférence (la catégorie d'innovation subjective à quoi se trouve subordonnée, de par l'ordre choisi, la catégorie historique subjective de l'observateur : la rupture apportée par le nouveau est reconnue comme telle malgré la position plus traditionaliste et continuiste de l'observateur).

Dans le cas (B), à l'inverse, c'est la configuration de l'observateur qui devient déterminante, occulte la nature de ce qui est étudié et finalement s'y substitue.

1.2. Le rôle de l'ordre

Sans nous attarder, comme nous venons de le faire à propos de cet aspect particulier que constitue l'analyse des rapports entre un observateur et ses objets d'étude, nous voulons revenir sur certains autres aspects de type épistémologique que comporte le paradigme proposé.

Commençons par rappeler, en les résumant, certaines de ses caractéristiques principales.

(i) D'un point de vue sémantique, nous pouvons dire qu'il permet une récupération opératoire des représentations de l'infini, dont on sait qu'elles jouent des rôles plus ou moins argumentatifs (*cf.* paradoxes de l'infini, ou régressions à l'infini, ou passages aux limites, etc.).

(ii) Dans cette ligne, nous avons pu thématiser l'équivalence possible entre un tout et certaines de ses parties propres en vue, notamment, de surmonter certains paradoxes apparents associés à l'analyse des phénomènes humains.

(iii) Nous venons d'évoquer et d'analyser la pertinence de sa "tolérance" à la co-participation de l'observateur à ses propres objets d'observation.

(iv) Enfin, et c'est ce que nous voulons aborder maintenant, il réserve un rôle important, d'un point de vue sémantique, conceptuel et épistémologique, au concept d'*ordre*.

En effet, ce paradigme, plus qu'à des grandeurs ou à des évaluations absolues, accorde une importance à des séquentialités (fussent-elles pluridimensionnelles) ; il s'attache à une représentation en termes d'ordre, où les concepts de prédécesseurs, de successeurs, de premier ou de dernier terme, de topologies denses, discrètes ou continues tiennent une place tout à fait essentielle. C'est la disjonction, propre au transfini, entre concepts de cardinalité et d'ordinalité qui autorise l'apparition de ces distinctions d'où peuvent découler nuances et finesses associées à l'ordre. En même temps la cardinalité elle-même perd ses traits proprement numériques, à quoi se trouve substitué le concept d'applications bijectives entre ensembles. Ce qui contraste avec les paradigmes du fini qui sont à l'oeuvre dans la scientifisation des phénomènes naturels, dans lesquels les éléments constitutifs sont de vrais nombres, pour qui valent les axiomes de Peano et pour qui la distinction - numérique - entre cardinaux et ordinaux n'a plus de pertinence.

Pour mettre en lumière le rôle conceptuel particulier que peut jouer la référence à l'ordre, prenons-en une illustration non technique. Considérons les énoncés suivants :

"*a* si et seulement si *b*"
et :
"*b* si et seulement si *a*".

Si *a* et *b* ne sont pas identiques (même si l'on considère l'énoncé comme une équivalence, au sens technique du terme), le rapprochement des deux énoncés semble exprimer une pure redondance. Mais, sous un autre angle, si l'on concentre son attention non plus sur les "produits" (que sont *a* ou *b*), mais sur le processus de leur genèse (*a à partir de b* ; *b à partir de a*) nous voici renvoyés, avec ce rapprochement, à ce que l'on a pu appeler la "galaxie auto-" [2].

Il est vrai que si de *a* à *b* et de *b* à *a* il suffit d'un nombre fini d'étapes pour établir la preuve ou fabriquer le produit, on devra s'en tenir à la stricte relation d'équivalence et au point de vue de la redondance. Mais si dans l'entre-deux, l'approche se trouve infinitisée, alors il peut en aller différemment : le cercle peut ne plus en être nécessairement un et l'"auto-" peut osciller entre la réalité et l'illusion, du fait qu'un troisième terme a en quelque sorte trouvé son autonomie et sa spécificité, à savoir, l'entre-deux de *a* et *b*. En effet, si l'on considère que cet entre-deux se caractérise par la puissance du dénombrable, cela est possible de deux façons au moins.

(i) Soit que le type d'ordre qui mène de *a* à *b* diffère du type d'ordre qui mène de *b* à *a*. Il s'établit alors une "dissymétrie" du processus et le cercle devient orbite elliptique (si l'on peut oser la métaphore !). Les deux trajets ne s'équivalent plus (au moins en termes des types d'ordre mis en jeu) et l'on peut trouver un fondement pour établir une discrimination.

(ii) Soit, si les types demeurent équivalents (et le cercle demeure cercle), que les sous-ensembles associés à chacun des trajets, tout en conservant même puissance et même type d'ordre, se distinguent de par les éléments qui les spécifient (par exemple ils peuvent n'avoir aucun élément en commun, tout en ayant chacun la puissance de l'ensemble dont ils sont des parties propres, situation que seule permet la propriété infinitaire). C'est alors la nature des étapes des trajets qui fait la différence.

Ainsi, le rapprochement des énoncés (A) et (B), bien qu'il formule un résultat quant aux rapports de *a* et de *b*, pose aussi une question. Celle des moyens du passage effectif de *a* à *b* et de *b* à *a*, c'est-à-dire celle du parcours impliqué par l'expression apparemment neutre "si et seulement si". Du moins si l'on accepte de s'extraire d'une représentation strictement finie de la relation considérée[1].

1.3. Générativité, prédictibilité et démarches gnoséologiques

Le paradigme proposé n'a-t-il valeur que descriptive ? Les règles qu'il énonce, les calculs qu'il permet, peuvent-ils avoir certains côtés *prescriptifs* (au sens que Wittgenstein donnait à ce terme [4]), qui réuniraient les conditions d'une réelle construction d'objectivité ? Avec ces questions, essentielles du point de vue épistémologique, sont posées aussi des questions plus techniques relatives à la générativité intrinsèque du modèle, à sa prédictibilité éventuelle à propos des phénomènes qu'il étudie, comme à la stabilité de la formalisation et de l'interprétation qu'il est susceptible de présenter. Bien que ces questions soient en fait assez différentes les unes des autres et engagent des analyses sur des terrains bien distincts, nous les discuterons ensemble dans la mesure où elles s'inscrivent dans le cadre d'un même type d'interrogation épistémologique.

Nous avons déjà examiné la question de la générativité interne du modèle en évoquant et analysant les passages de domaine à domaine (de cardinalité à cardinalité) par passage à l'abstraction et à la combinatoire phénoménale, soit à partir de la combinatoire du domaine lui-même (formation de l'ensemble des parties), soit à partir de celle de ses catégories constitutives (formation de la classe des types d'ordre). L'utilisation de l'hypothèse généralisée du continu revient à affirmer l'équivalence des résultats de cardinalité obtenus par ces deux procédures. On peut l'interpréter en disant que l'on obtient un résultat identique de générativité (en termes de domaines) en composant phénomènes et constellations de phénomènes issus d'une analyse abstraite effectuée à partir d'un domaine, ou en parvenant à en abstraire la phénoménologie exhaustive. Ainsi, d'un point de vue méthodologique et dans ce cas précis, l'hypothèse généralisée du continu revient à poser l'équivalence des points d'aboutissement atteints par induction généralisante ou par démarche abductive.

De même, toujours dans le registre interne, nous avons pris en compte la générativité associée aux types d'ordre eux-mêmes (opérations d'ouverture et de fermeture, formation d'un bon ordre, discrétisation ou densification...). L'utilisation de ces opérations enrichit la phénoménologie du domaine tout en permettant d'assurer ce que l'on pourrait comparer à une "stabilité algébrique" du domaine : l'effet de ce genre d'opération de passage d'une phénoménologie à une autre dans un domaine donné, appartient toujours au domaine; pour en sortir il convient de recourir à des opérations ensemblistes d'une autre nature (celles que nous venons d'évoquer plus haut). En même temps cette générativité phénoménologique permet de considérer que si l'exhaustivité du domaine n'est

[1] Cette illustration et ces arguments trouvent un écho avec les <u>relations mixtes</u> (dites de connaissance) que J. Vuillemin [3] voit chez Aristote, à propos des types de relation, en distinguant entre connaissance (réelle) et objet connu (représentation idéale) : *a* R' *b* pour la connaissance et *b* R *a* pour la chose. La discussion menée par cet auteur sur le caractère logiquement contradictoire de telles relations indique que l'on n'a pas affaire à proprement parler à une relation logique, mais bel et bien à des <u>parcours</u> distincts (et en ce sens, c'est-à-dire en s'intéressant non seulement aux points de départ et d'aboutissement mais aussi à la nature des chemins parcourus, il est exact qu'un produit d'une telle "relation" par sa converse n'est plus l'identité).

évidemment pas à notre portée, néanmoins il n'est rien qui puisse s'y manifester que nous ne puissions traiter selon les approches et méthodes d'analyse proposées.

Il existe aussi une générativité que nous pouvons qualifier d'externe. En effet, à partir de concepts ou de propriétés propres à la théorie des ensembles, on peut rechercher si l'on peut dégager, dans l'objet d'étude lui-même, des éléments de réalité phénoménale qui leur correspondent. C'est-à-dire que l'on peut s'appuyer sur la dynamique autonome de la théorie formelle pour essayer de redistribuer de manière significative le champ d'étude et de caractériser ainsi de nouveaux éléments de réalité qui étaient restés masqués ou qui étaient agencés de façon différente. On verrait là une démarche réciproque de celle qui a gouverné la mise en place du paradigme : il ne s'agit plus de récupérer conceptuellement la sémantique et la structure du rapport infini pour les traiter rationnellement dans le champ des phénomènes humains, mais au contraire, à partir de cette rationalité constituée, d'enrichir les capacités de reconnaître le fonctionnement et l'usage du concept transfini, dans le paysage des phénomènes. Démarche qui, méthodologiquement, s'apparenterait, cette fois, plutôt à une approche hypothético-déductive.

Une telle position consiste en fait à postuler que l'infini en acte, tel que le traite le transfini, est a priori spécifique à tout modèle des phénomènes humains. Dès lors, il ne s'agit plus seulement d'aller chercher, dans une théorie logico-mathématique, des éléments d'analyse et d'intelligibilité permettant d'interpréter et de décrire ces phénomènes, mais au contraire, comme nous y avons déjà insisté, de les constituer objectivement. Ce qui revient à considérer que la théorie *pose* un paradigme spécifique à la modélisation de ces phénomènes. Il y a là, certes, un renversement de perspective, mais il n'est pas autrement surprenant : les théories logico-mathématiques nous renseignent autant sur les capacités et le fonctionnement de l'esprit humain que sur les idéalités objectives qu'il crée puis étudie. La deuxième partie de ce chapitre, qui traite des fondements axiomatiques et de leurs répondants, en donnera quelques exemples et nous y reviendrons dans le chapitre de conclusion.

Auparavant, nous voudrions évoquer brièvement la question d'une éventuelle prédictibilité, à propos des phénomènes humains, que pourrait fournir le recours au paradigme. Il est clair qu'une prédictibilité complète est exclue par principe, par les conditions axiomatiques, mais aussi par les théorèmes d'indécidabilité et d'incomplétude de la théorie des modèles que nous avons adoptée. Ce qui n'est nullement insatisfaisant si nous voulons prendre en considération les possibilités d'innovation et l'exercice de la liberté.

Néanmoins une prédictibilité partielle est non seulement concevable, mais aussi contenue dans la générativité du paradigme, ainsi que dans les moyens de calcul qu'il offre. Cette prédictibilité concerne la partie déterministe, soumise à des lois de nécessité (fussent-elles statistiques, ou même ne s'exerçant que sur une longue durée) des phénomènes humains et qui correspondent à leurs composantes systémiques (qui ne sont pas qu'économiques, mais aussi psychologiques et sociales, comme le montrent les sciences humaines et sociales). Les exemples que nous avons donnés au chapitre précédent, comme au chapitre XIII (à l'occasion de l'établissement des correspondances), montrent que l'application des opérations ensemblistes et des opérations de calcul transfinitaire (sur les cardinaux et les types d'ordre), conduisent à des résultats dont on peut considérer qu'ils sont "prévus" par l'application de telles opérations sur leurs données. Il en résulte, du point de vue épistémologique où nous nous plaçons ici, que bien des théories partielles ou locales que ces exemples nous suggèrent ou nous incitent à élaborer, peuvent se prêter à vérification et réfutation, y compris dans un sens de capacité "prévisionnelle", plus ou moins limitée mais réelle, car susceptible d'être soumise aux tests de l'observation.

Concluons cette partie par une digression, mais qui ne nous sortira pas d'une certaine forme de réflexion épistémologique.

Il fut un temps où l'on pensait que les phénomènes naturels étaient régis par un principe fondamental : "rien ne se perd, rien ne se crée, tout se transforme". C'était l'époque de la recherche des principes de conservation (matière, énergie) et des lois d'invariance (symétries plus ou moins internes des objets d'étude). Malheureusement l'existence (avérée) et l'énoncé de tels principes - si féconds ont-ils été et demeurent-ils - ne permettaient pas de dégager des critères d'évolution pour les processus dont les systèmes étaient le siège et que l'on observait empiriquement. La découverte de tels critères fut liée, on le sait, à la possibilité de définir des fonctions croissantes : malgré tout, quelque chose se perdait ou se créait, de l'entropie, de l'information, et bien des lois d'invariance furent avantageusement supplantées par des lois d'optimalisation. Curieusement pourtant, ce qui se créait ou se perdait, et qui revêtait un caractère si important, n'avait à proprement parler rien de "substantiel" (les lois de conservation restaient valables pour tout ce qui était substantiel) ; c'étaient des agencements, des probabilités, des ordres ou des désordres. Mais bien entendu on restait dans le cadre de la considération de quantités, de grandeurs finies (même si l'on recourait parfois, notamment dans le cas des transitions critiques, à des passages à la limite numérique infinie).

Voici maintenant, avec le transfini, une situation nouvelle, qui pourtant n'échappe pas à des caractères de naturalité et qui conserve d'ailleurs, à travers la pertinence des questions d'ordre, une certaine contiguïté conceptuelle avec les situations précédentes. Mais les dimensions quantitatives - et les questions de conservation et d'invariance associées - prennent un tout autre sens : dans le paradigme du transfini, on peut créer ou perdre des éléments, voire des types d'ordre entiers, sans pourtant modifier cardinalité ou ordinalité d'ensembles : ce qui se perd ou se conserve ne dépend plus de la mesure au sens usuel[1].

On admettra volontiers qu'il est peu de situations naturelles qu'on puisse y reconnaître. Sauf à considérer comme telle les jeux des phénomènes humains :

"*Chacun en a sa part et tous l'ont tout entier*"
ou, à l'inverse :
"*Un seul être vous manque et tout est dépeuplé*".

C'est là ce que révèle l'intuition du poète.

2. PHENOMENES HUMAINS ET FONDEMENTS ENSEMBLISTES. L'AXIOMATIQUE DE ZFC

Revenons à la question des fondements axiomatiques de la théorie des ensembles. La question que nous voulons aborder maintenant est de savoir si l'on peut trouver une correspondance, en termes de *principes* régissant les phénomènes humains en tant qu'objets d'étude (et leurs conditions de possibilité comme tels), avec les axiomes de la théorie (ZFC en l'occurrence ; voir [5] pour toute cette discussion). Dans ce but, nous considérerons successivement les différents axiomes (et schémas d'axiomes) qui constituent la panoplie axiomatique de ZFC (dans sa version la plus usuelle) et nous tenterons d'en donner une interprétation principielle relative à la phénoménalité.

Rappelons ces axiomes et interprétons-les au fur et à mesure de leur présentation (l'appartenance est représentée par le signe "$\in$", l'inclusion par "$\subseteq$" (l'inclusion stricte par "$\subset$"), le quantificateur existentiel par "E", le quantificateur universel par "$(\forall)$", l'implication par "$\rightarrow$", l'équivalence par "$\leftrightarrow$", la négation par "*"; la logique sous-jacente sera le calcul des prédicats du premier ordre avec égalité) :

I. <u>Axiome d'extensionalité</u>

Il s'écrit formellement, dans le langage que nous avons adopté, sous la forme :

$$(x)\ (y)\ [(z)\ (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y]$$

Il peut s'énoncer sous la forme plus explicite : "si $x <= y$ et $y <= x$, alors $x = y$", c'est-à-dire "si x est inclus dans y et si y est inclus dans x, alors x et y sont égaux". Cet axiome pose le caractère *extensionnel* des ensembles, c'est-à-dire le fait que tout ensemble est complètement défini par ses membres (la question de la définition intensionnelle, par une propriété, viendra plus tard avec les

[1] Par exemple, avec un seul ensemble de cardinalité dénombrable nous pouvons constituer deux ensembles disjoints - sans éléments communs - de même cardinalité dénombrable et présentant le même type d'ordre (ne serait-ce qu'en considérant, à partir de l'ensemble des entiers naturels, d'un côté les nombres pairs, et de l'autre les nombres impairs), etc.

schémas d'axiomes de compréhension et de séparation). Deux ensembles qui comprennent les mêmes membres seront donc égaux.

En principe, du point de vue de l'interprétation que nous pouvons en donner dans le cadre de la correspondance, cet axiome - qui ne fait pas intervenir l'ordre - ne concerne que les cardinalités, c'est-à-dire les domaines (en effet, rappelons que des ensembles présentant un type d'ordre différent peuvent être constitués des mêmes éléments, tandis qu'à l'inverse, des ensembles présentant des éléments différents peuvent présenter des types d'ordre identiques).

Transposé dans le champ phénoménal, l'axiome pose qu'un domaine (ou, le cas échéant, un sous-domaine) constitué par les mêmes phénomènes sont égaux, c'est-à-dire peuvent être traités de la même façon. Malgré son caractère apparemment trivial, cette transposition n'est pas anodine et, de fait, elle soulève des problèmes redoutables quant à la constitution de l'objet d'étude, c'est-à-dire, finalement, quant à la construction de l'objectivité du champ des phénomènes humains. En effet, cette transposition affirme qu'une extensionalité phénoménale caractérise sans ambiguïté ce champ d'étude. Il s'agit bel et bien d'une forme de réduction ensembliste, associée à une identification des composants. On pourra donc trouver dans cette prise de position une légitimation de principe d'une démarche scientifique analytique, appliquée aux phénomènes humains - psychologie, sociologie, ethnologie... -, visant à la constitution d'un champ de connaissance accessible aux méthodes objectives, par l'"énumération" et l'identification (fût-elle potentielle et jamais aboutie, puisque infinie) des constituants (la question de la caractérisation intensionnelle n'est évidemment pas envisagée ici ; elle viendra plus tard, avec l'étude des axiomes correspondants (**V** et **V'**)).

Toutefois, il nous faut remarquer que si nous nous en tenions à ce seul aspect, cette perspective irait tout à fait à l'encontre de l'idée que nous avons proposée, selon laquelle ce n'est ni la quantité, ni même la "composition" des ensembles qui joue un rôle essentiel, mais bien l'ordre qu'ils présentent. La compatibilité des points de vue exigerait donc de considérer, au moins provisoirement, que c'est de l'appartenance à un domaine phénoménal qu'il s'agit principalement ici (cardinalités), plus qu'à des catégories de phénomènes proprement dites (types d'ordre). A moins de nous situer d'emblée à un autre niveau d'analyse et de considérer que ce sont les types d'ordre eux-mêmes qui constituent des éléments d'un ensemble correspondant à un objet d'étude. De ce point de vue, ce qui est à identifier, ce sont ces types d'ordre (ces catégories phénoménales) constitutifs. L'axiome poserait alors que des ensembles de phénomènes dans lesquels on trouverait extensionnellement les mêmes types d'ordre sont égaux, c'est-à-dire complètement identifiables relativement à leur spécification ensembliste, et correspondent par conséquent à la même phénoménalité. Il nous semble que ce dernier point de vue est plus riche et plus conforme à la nature de la démarche que nous avons engagée ; c'est donc celui que nous retiendrons pour la suite, sans oublier pourtant qu'il n'est pas le seul que nous puissions adopter.

Nous ne pousserons pas plus loin cette discussion de l'interprétation de l'axiome d'extensionalité en termes de phénomènes humains, mais nous avons voulu au moins souligner ces points essentiels, pour montrer qu'en effet, le fait de soulever la question de la caractérisation extensionnelle n'est nullement anodin et conduit à engager une position épistémologique.

II. Axiome de la paire

Il s'écrit (ici "V" représente le connecteur "ou"):

$$(a)\ (b)\ \mathrm{E}\ y\ (x)\ [x \in y \leftrightarrow (x = a\ \mathrm{V}\ x = b)]$$

Il peut s'énoncer : "étant donnés deux éléments quelconques a et b, il existe l'ensemble qui contient exactement a et b". C'est cet ensemble qui est nommé la paire de a et b : $\{a, b\}$ (ou $\{b, a\}$ puisque, à ce stade, elle n'est pas ordonnée). Cet axiome autorise la construction d'ensembles variés (à un ou deux éléments) à partir d'éléments donnés.

Du point de vue de l'interprétation, cet axiome conduit à poser que l'appariement de deux phénomènes (ou, plus généralement de deux configurations de phénomènes) peut aussi être considéré comme un phénomène (ou une configuration relevant de la phénoménalité). Là encore, comme pour l'axiome d'extensionalité, on peut y voir une assertion triviale ou, au contraire, un noeud de problèmes réels pour la constitution de l'objet d'étude.

En effet, il ne va nullement de soi que le simple rapprochement de deux phénomènes, par juxtaposition par exemple, constitue par soi-même un phénomène relevant d'une analyse du genre de celle que nous avons entreprise ; nous sommes en fait incité à construire le point de vue selon lequel cela devient possible. En termes ensemblistes ce rapprochement pourrait fort bien se réduire à la formation d'une classe dépourvue des propriétés d'ensembles, telle une collection ; en termes de phénomènes, on pourrait perdre la texture phénoménale dans la caractérisation individuelle de deux phénomènes, ou encore ne pas être en mesure de la constituer à partir de phénomènes avérés. L'axiome nous garantirait alors que des phénomènes isolés sont toujours susceptibles d'être réintégrés dans leurs relations phénoménales pour se présenter comme phénomène unifié et que l'analyse ou la synthèse ne modifie pas essentiellement la nature et la pertinence de l'objet d'étude. Cette fois, c'est surtout sous l'angle méthodologique que la garantie axiomatique devient tout à fait importante.

III. Axiome de l'union

Il s'écrit ("&" représente le connecteur "et") :

$$(a)\ \mathrm{E}\ y\ (x)\ [x \in y \leftrightarrow \mathrm{E}\ z\ (x \in z\ \&\ z \in a)]$$

Il peut s'énoncer : "quel que soit l'ensemble *a* il existe l'ensemble U*a* (l'ensemble union de *a*) dont les membres sont exactement les membres des membres de *a*". Associé à l'axiome de la paire, cet axiome permet d'élargir le champ offert à la construction d'ensembles.

Du point de vue de l'interprétation, cet axiome introduit la pertinence, sous un angle compositionnel, de certains niveaux de description, d'analyse, d'interprétation, des phénomènes par rapport à d'autre niveaux, sans perdre pour autant le caractère phénoménal (mais en restant dans un domaine donné ; voir plus bas). Ainsi, si une configuration de phénomènes est représentée par un ensemble de types d'ordre dont chacun est composé aussi par des types d'ordre plus "profonds", ce que l'axiome garantit, c'est que la réunion de ces types d'ordre "plus profonds" constitue aussi un ensemble phénoménal : il apparaît une sorte d'"homogénéité" phénoménale, relativement au niveau d'analyse (sans que, bien entendu, soit conservée pour autant la nature des ensembles - des phénomènes - eux-mêmes). Nous trouvons là un moyen d'enrichissement de la phénoménalité à étudier, à partir d'une phénoménalité donnée que l'on a analysée, en rassemblant, pour ainsi dire, les résultats de l'analyse. Toutefois il faut souligner le fait essentiel que cet axiome, du fait que sur le plan des ensembles il ne permet pas de changer de cardinalité infinie - y aurait-il une infinité dénombrable d'ensembles eux-mêmes de cardinalité infinie dénombrable, on ne pourrait construire ainsi le continu -, ne permet pas non plus aux phénomènes de changer de domaines infinitaires.

IV. Axiome de l'ensemble des parties

Il s'écrit :

$$(a)\ \mathrm{E}\ y\ (x)\ (x \in y \leftrightarrow x <= a)$$

Il peut s'énoncer : "quel que soit l'ensemble a, il existe l'ensemble P*a* (l'*ensemble des parties* de *a*) dont les membres sont exactement toutes les parties (tous les sous-ensembles) de a". Cet axiome, associé à l'axiome de séparation et à l'axiome de l'infini, est fondamental pour permettre la construction d'ensembles de cardinalités strictement supérieure à celle d'un ensemble (infini) de départ donné.

Du point de vue de l'interprétation, cet axiome est constitutif d'une générativité de l'analyse phénoménale qui permet notamment le changement de domaine phénoménal. En particulier, c'est à partir de son utilisation (une fois admises les correspondances avec les axiomes de séparation et de l'infini) que l'on peut passer du domaine existentiel (dénombrable) au domaine spéculatif (continu) par abstraction et combinaison entre les catégories et phénomènes existentiels. Le changement de niveau est, cette fois, beaucoup plus radical que celui que permettait d'envisager l'axiome d'union. Il permet de considérer comme phénomènes pertinents toutes les combinatoires d'éléments et de parties que l'on peut obtenir à partir d'un ensemble donné, c'est-à-dire toutes les combinaisons phénoménales résultant de l'analyse d'une configuration donnée. Et, ce faisant, de s'"extraire" du domaine de délimitation de cette configuration pour la thématiser en quelque sorte à partir d'une position de surplomb, d'un "méta-point-de-vue", pourrait-on dire, relativement au niveau de phénoménalité de départ (sans quitter pour autant le champ des phénomènes).

Toutefois il faut remarquer que, de la même façon que, pour les ensembles, cet axiome ne permet la construction d'ensembles qu'à partir de sous-ensembles dont l'existence a *déjà été établie*, il ne doit en principe permettre de considérer de phénomènes qu'à partir de sous-configurations de phénomènes déjà repérées comme telles. La question qui se pose est donc de savoir comment *former* de tels sous-ensembles (et de telles sous-configurations correspondantes) bien au-delà de ceux que permet l'usage des axiomes de paires et d'union. C'est cette question qu'abordent les schémas d'axiome suivants, qui font entrer la caractérisation intensionnelle (et non plus seulement extensionnelle) dans le champ phénoménal.

V. et V'. Schéma d'axiome de séparation et schéma d'axiome de compréhension

Ce sont des schémas d'axiome dans la mesure où ils font intervenir des variables de prédicat quelconques, mais sur lesquelles la limitation à un langage du premier ordre interdit de quantifier. Nous les avons regroupés dans le même paragraphe non seulement pour les raisons bien connues qui ont conduit à leur distinction (paradoxe de Russell), mais aussi parce que leur correspondance dans le domaine phénoménal appelle une discussion qui traite de leurs rapports.

V. (Séparation)

Il s'écrit (A (x) est une condition sur x, les t_j sont les variables libres de A (x), autres que x, et y n'est pas une variable libre de A (x)) :

$$(t_1)\dots(t_n)\ (a)\ \mathrm{E}\ y\ (x)\ [x \in y \leftrightarrow x \in a\ \&\ \mathrm{A}\ (x)]$$

Il peut s'énoncer : "Quels que soient l'ensemble a et la condition A (x) sur x, il existe l'ensemble qui contient exactement les membres x de a qui remplissent la condition A (x)".

V'. (Compréhension)

Il s'écrit (avec les mêmes notations et conditions que pour le schéma d'axiome précédent (**V**)) :

$$(t_1)\dots(t_n)\ \mathrm{E}\ y\ (x)\ (x \in y \leftrightarrow \mathrm{A}\ (x))$$

et il peut s'énoncer : "pour toute condition A (x) sur x, il existe un ensemble qui contient exactement les éléments x qui remplissent cette condition".

Comme nous l'avons indiqué, ces schémas d'axiome permettent en principe de définir des ensembles et sous-ensembles en compréhension, à partir d'une propriété (A (x) en l'occurrence), et non plus en extension. S'ils jouent donc un rôle essentiel dans la théorie des ensembles, on peut s'attendre à ce que ce rôle soit plus important encore dans le cas du traitement des phénomènes humains. Ce qui les différencie est très clair : l'axiome de compréhension postule que les éléments qui vérifient A (x) peuvent être ensemblisés ; l'axiome de séparation ne le postule que pour les éléments qui appartiennent déjà à un ensemble.

Le recours à l'axiome de compréhension entraîne une contradiction dans la théorie des ensembles ; pour le voir il suffit de considérer, pour un ensemble, la propriété de ne pas appartenir à soi-même : s'il ne s'appartient pas il s'appartient, s'il s'appartient il ne s'appartient pas ; c'est le paradoxe de Russell. Le paradoxe est levé en considérant qu'il *n'existe pas* d'ensemble qui contient exactement tous les éléments qui ne se contiennent pas eux-mêmes. La levée du paradoxe exige donc que l'ensemblisation soit restreinte, ce qu'on obtient en exigeant l'appartenance à un ensemble de l'élément qui remplit la propriété, ainsi que l'énonce l'axiome de séparation ; dès lors si ce qui remplit la propriété n'est pas un ensemble, il n'y a plus de paradoxe.

Une situation comparable, et fondamentale pour notre propos, apparaît avec l'antinomie de Cantor : si l'on accepte de parler de l'ensemble de *tous* les ensembles, alors en considérant l'ensemble de ses parties on construit un ensemble strictement plus grand, ce qui doit être impossible puisque l'on est parti de l'ensemble de tous les ensembles ! Il faut donc renoncer à l'*existence* même d'un ensemble de tous les ensembles. Vu son importance épistémologique pour notre démarche, ce point relatif au statut de la totalité (qui apparaît aussi pour les nombres ordinaux avec l'antinomie de Burali-Forti) et de l'ontologie ensembliste sera repris plus bas ; nous ne nous y attarderons donc pas à ce stade.

Du point de vue de la correspondance avec les phénomènes humains, le schéma d'axiome de séparation engage à accepter dans le champ d'étude et de constitution des objectivités, tout ce qui, des phénomènes humains, peut être "qualifié" : la détermination par une "propriété" d'un phénomène nouveau, à partir de phénomènes déjà définis et déterminés comme tels. Une telle possibilité étend considérablement le champ de constitution, d'analyse et d'étude de l'objectivité des phénomènes ; elle permet de discerner des manifestations phénoménales là où la grossièreté d'une analyse interdisait de les reconnaître ; elle autorise même à décider les contours (ce qui ne garantit évidemment pas que l'ensemble ainsi déterminé ne soit pas vide). Pourvu toutefois que, pour ce faire, on ne recoure pas à des éléments extra-phénoménaux (il faut que les nouveaux ensembles soient des ensembles).

Si les raisons théoriques de ne prendre en compte que le schéma d'axiome de séparation sont bien claires, il faut pourtant ne pas laisser totalement de côté le schéma d'axiome de compréhension, non pas en tant que constitutif du paradigme que nous considérons, mais en tant qu'instrument d'analyse particulièrement bien adapté à la compréhension de certaines situations effectives. En effet, bien souvent, les caractérisations empiriques spontanées par attribution de propriétés, ne font guère cas de la nécessité d'une pré-caractérisation existentielle de l'ensemble implicite à quoi elles réfèrent (de la condition d'appartenance au champ des phénomènes de ce qu'elles caractérisent) ; leur interprétation, éventuellement leur critique, en invoquant l'usage abusif du schéma de compréhension est alors simple et directe. De même, bien souvent, fonctionne à plein, de façon intuitive et sans autre précaution, un postulat implicite de totalisation (individu réductible à la totalité de ses caractères, collectivité réductible à la totalité de ses moeurs et de ses individus, etc.) ; là encore le recours à une explication de ce type peut être éclairante.

Par ailleurs, bien que dans un registre un peu différent, il semble bien que certaines des antinomies formelles qui en résultent parviennent à trouver elles-mêmes une sorte de répondant dans des traits de langage relatifs aux relations humaines (et qui dans un langage purement épistémique ou aléthique seraient bel et bien contradictoires). Par exemple à la question : "Untel est-il crédible ?", il existe une réponse attestée et acceptée : "oui et non" ; ou encore trouve-t-on l'appréciation : "Untel est à la fois responsable et irresponsable". Ces non-sens apparents renvoient en fait à une économie dans l'analyse ou dans la formulation de la question ou de la réponse, économie qui revient à accepter le jeu de la totalisation au prix d'une virtualisation de la réponse. Ainsi, il est vraisemblable que dans certaines circonstances, sous certaines conditions, Untel est crédible (ou responsable), tandis que dans d'autres circonstances ou sous d'autres conditions il ne l'est pas ; la non discrimination entre ces situations revient à entériner une représentation globalisante qui induit l'antinomie : il est vrai que pris globalement dans une globalité de situation, Untel est potentiellement à la fois ceci et cela. Une telle configuration peut s'interpréter en y voyant l'attribution d'une propriété (en intension) sans que la phénoménalité correspondante (les situations effectives) soit arrivée à l'existence : elle n'est plus que potentielle ; c'est le fonctionnement (abusif) du schéma d'axiome de compréhension.

Revenons maintenant de façon plus précise à la question cruciale que nous avons évoquée au début de ce paragraphe, la question générale du statut de la totalité et de l'ontologie implicite de la théorie consistante des ensembles. Le schéma d'axiome de séparation qui met sous condition l'existence de certains ensembles, conduit, avons-nous vu, à exclure du champ de pertinence le concept d'un ensemble de tous les ensembles. Il en résulte pour nous une conséquence de principe tout à fait essentielle : la correspondance que nous postulons avec les phénomènes humains induit pour ces derniers une rationalité pour laquelle l'idée de totalisation ou de globalisation des phénomènes humains ne trouve plus aucun fondement (qui ne soit pas antinomique). Ainsi, le paradigme impose de lui-même, au niveau du champ conceptuel qu'il constitue et de l'objectivité qu'il construit, qu'une telle représentation totalisante ou globalisante ne puisse servir de source à aucun concept valide. Ce qui conduit donc à écarter d'emblée toute représentation d'une clôture possible qui serait traitable dans un modèle relevant de ce paradigme.

Nous interpréterions volontiers cette situation, en forçant quelque peu la note, en disant que ce paradigme préserve ce qui, dans ce champ, relève de la création, de la production de singularité, de devenir non réductible ; il laisse intacte la place d'une liberté. En effet, bien que - sous l'égide du schéma d'axiome de séparation - il reste en mesure de traiter de tout ce qui fut produit, de tout "fait" humain, pourvu que la réalisation en ait été acquise au titre de phénomène humain, il impose, avec le rejet de l'axiome de compréhension, d'écarter dès l'abord toute prétention à une formalisation totalisante et prédifinie de ce que l'on appellerait abusivement *le* phénomène humain dans son devenir (et les enjeux du "faire"). Il invalide à la fois la position selon laquelle il existerait *un* phénomène humain (c'est-à-dire pris comme totalité) et celle selon laquelle la "condition humaine" serait tout entière réductible à ses phénomènes.

VI. <u>Axiome de l'infini</u>

Il s'écrit :

$$\mathrm{E}\ z\ [0 \in z\ \&\ (x)\ (y)\ (x \in z\ \&\ y \in z \rightarrow x \cup \{y\} \in z)]$$

Il peut s'énoncer : "il existe au moins un ensemble infini z, c'est-à-dire tel que 0 en soit membre et que si x et y en sont membres, alors l'union de x et du singleton de y en sont membres". Cet axiome est évidemment fondamental pour toute théorie du transfini, puisque c'est lui qui garantit l'existence d'au moins un ensemble infini (les axiomes précédents garantissent l'existence d'un nombre infini d'ensembles, mais pas encore celle d'un ensemble infini). On peut le considérer comme une instanciation particulière, non paradoxale, du schéma d'axiome de compréhension. Par surcroît, il indique une procédure de formation d'un tel ensemble, par une série d'ensemblisations successives, à l'image de la construction des nombres ordinaux par von Neumann (construction simultanée de N et du nombre ordinal w)[1].

Du point de vue de l'interprétation, cet axiome joue le rôle d'un axiome d'existence de l'objet d'étude : il garantit l'existence même d'un champ des phénomènes humains (et ouvre ainsi la possibilité de son objectivation). En même temps il affirme le caractère constitutivement inépuisable de ce champ phénoménal. On peut même considérer qu'en association avec les axiomes précédents il permet de procéder à un premier repérage formel et à une première hiérarchisation, *via* l'usage des cardinalités et ordinalités transfinies qu'il fonde.

Sous un angle plus épistémologique, que nous reprendrons dans le chapitre de conclusion (chapitre XVI), nous pouvons considérer que la correspondance entre système axiomatique et phénomènes humains nous engage ici, avec cet axiome de l'infini et son interprétation, à adopter une position très particulière par rapport à ces phénomènes (relativement aux controverses sur l'infini en puissance et l'infini en acte) : une position qui consiste à *affirmer* qu'en tout état de cause l'infini en acte se trouve effectivement dans tout modèle des phénomènes humains, voire les détermine. Dans cette perspective, poser l'axiome de l'infini dans la théorie des ensembles revient à poser un paradigme spécifique à la modélisation de ces phénomènes humains et à créer les conditions *sine qua non* de leur objectivation. A la limite, cela pourrait revenir à renverser la perspective même selon laquelle il conviendrait d'aborder la correspondance. Nous reviendrons plus longuement sur ce point dans le chapitre de conclusion.

---

[1] Ici, le terme "fini" est pris au sens strict de l'absence de bijection entre l'ensemble et une de ses parties propres, c'est-à-dire au sens de formellement fini. C'est le lieu de rappeler, sans y revenir, la discussion du chapitre XIII, paragraphe 2.2.3, à propos des rapports entre fini et infini, avec l'introduction des distinctions entre formellement et calculablement fini (ou infini), en liaison avec l'existence de modèles non standard.

VII. Schéma d'axiome de remplacement

Il s'écrit (u, v, w, ne sont pas libres dans $f\,(t, x)$ et z_1,..., z_n sont les variables libres de $f\,(t, x)$ autres que t et x) :

$$(z_1)\ldots(z_n)\ (a)\ [(u)\ (v)\ (w)\ (u \in a\ \&\ f\,(u, v)\ \&\ f\,(u, w)\ \rightarrow v = w) \rightarrow$$
$$\mathrm{E}\ y\ (x)\ (x \in y \leftrightarrow \times\ \mathrm{E}\ t\ (t \in a\ \&\ f\,(t, x)))]$$

Il peut s'énoncer : "quel que soit l'ensemble a, si A(t, x) est une condition fonctionnelle sur a, il existe un ensemble qui contient exactement les éléments x pour lesquels A (t, x) est vérifiée pour un t appartenant à a", ou encore : "si le domaine de variation d'une fonction est un ensemble, son domaine de valeurs est aussi un ensemble".

Pour la théorie des ensembles, l'intérêt de cet axiome est de permettre l'existence de certains ensembles, existence que les axiomes précédents ne garantissent pas (par exemple l'ensemble **E** constitué par la collection dénombrable des ensembles de cardinalités transfinies successives, les $\mathbf{Aleph_n}$; **E** présente la particularité que son ensemble union, **UE**, a un cardinal plus grand qu'un quelconque de ses membres, c'est-à-dire > = $\mathbf{Aleph_w}$; on peut ainsi prouver l'existence d'ensembles de cardinaux très grands). Cet axiome permet aussi de démontrer qu'à tout ensemble bien ordonné il correspond un nombre ordinal.

Du point de vue de l'interprétation, sans oublier la fonctionnalité mais en insistant plutôt sur la question des cardinalités, on y verra la possibilité de passer non seulement de niveau à niveau, mais aussi d'ensemble de métaniveaux (conçus eux-mêmes comme ensembles illimités de niveaux) à ensemble de métaniveaux. C'est, en quelque sorte, la garantie de possibilité d'une hiérarchie illimitée de systèmes d'*interprétations* des phénomènes humains, et donc un fondement formel au développement et à la poursuite d'une démarche herméneutique en général.

En même temps, et en insistant plutôt sur le caractère de fonctionnalité, cette fois, on peut y voir un postulat de *traductibilité* des phénomènes et de leurs systèmes d'interprétations les uns dans les autres (non seulement, donc, dans le cadre de la hiérarchie qui peut prévaloir dans une culture donnée, mais aussi de cadres hiérarchiques à cadres hiérarchiques entre cultures différentes). Ce qui revient à postuler une forme d'unité de la phénoménalité humaine, unité que manifeste la possibilité d'avoir une correspondance fonctionnelle qui ne fait pas sortir de la phénoménalité (la fonctionnalité ne fait pas sortir de la théorie ensembliste). Cette unité n'est pas à confondre avec une quelconque totalisation ou globalisation des phénomènes humains (*cf.* ci-dessus, la discussion à propos de l'axiome de compréhension) ; c'est celle - postulée - de la rationalité humaine qui permet à la communication d'exister (*cf.* les arguments relatifs au fondement transcendantal de la communauté communicationnelle [6], [7]).

Cet axiome fonde ainsi le postulat selon lequel il n'y a pas d'obstacle intrinsèque qui interdise de procéder à une étude objectivante, relativement à quelque phénoménalité humaine que ce soit : la correspondance de principe pourra toujours fonctionner. A la limite, des systèmes incommensurables d'interprétation (au sens épistémologique du terme), s'ils sont objectivement fondés, trouveront toujours un niveau d'abstraction et de formalisme où ils pourront néanmoins communiquer ; on considère donc que si incommensurabilité objective il y a, elle n'est pas absolue, mais relative à des niveaux d'interprétation.

VIII. Axiome du choix

Il s'écrit (ici le symbole "≠" signifie "différent de" et "*" représente la négation) :

$$(t)\ [(x)\ [x \in t \rightarrow \mathrm{E}\ z\ (z \in x)\ \&\ (y)\ (y \in t\ \&\ y \neq x \rightarrow {*}\mathrm{E}\ z\ (z \in x\ \&\ z \in y))] \rightarrow$$
$$\mathrm{E}\ u\ (x)\ (x \in t \rightarrow \mathrm{E}\ w\ (u)\ [v = w \leftrightarrow (v \in u\ \&\ v \in x])]$$

Il peut s'énoncer : "pour tout ensemble disjoint qui ne contient pas l'ensemble vide, il existe au moins une fonction de choix sur t, c'est-à-dire une fonction dont le domaine de variation est t et telle que pour tout membre s de t, $f\,(s)$ est un membre de s".

Intuitivement, cela revient à dire que si nous considérons un ensemble "global" formé d'ensembles "locaux" disjoints deux à deux, il est toujours possible de choisir un seul élément dans chacun de ces ensembles "locaux" pour former un nouvel ensemble (l'ensemble de choix). Ce qui suppose donc qu'il est possible de "marquer", pour le choisir, un membre particulier dans chaque ensemble local membre de l'ensemble global. Cet axiome permet notamment de démontrer le théorème de Zermelo, selon lequel il existe un bon ordre sur tout ensemble (même si on ne sait pas le construire, comme c'est le cas pour le continu). Notons toutefois que ce résultat est subordonné à l'acceptation supplémentaire de l'utilisation d'une procédure *imprédicative*, c'est-à-dire, en quelque sorte, faisant usage d'une circularité auto-référentielle[1].

Par ailleurs, sa consistance relative et son indépendance par rapport aux autres axiomes de ZFC ont été démontrées [8], [9].

L'axiome du choix tient une place spéciale dans la théorie des ensembles, dans la mesure où il a concentré sur lui de très nombreuses discussions sur les fondements, du fait notamment qu'il affirme essentiellement une existence (celle de l'ensemble de choix), sans fournir de moyens d'une construction effective d'un tel ensemble (*cf.* sur ce point, les controverses épistémologiques des logiciens et mathématiciens, en particulier autour de la critique intuitionniste [5], [10]).

Du point de vue de l'interprétation, nous pouvons suivre plusieurs approches selon les aspects examinés.

Par exemple nous pouvons considérer que cet axiome nous permet de distinguer et d'isoler des éléments, ainsi que de former avec eux une catégorie phénoménale nouvelle, à partir de choix opérés dans des sous-phénomènes composant eux-mêmes une catégorie phénoménale.

Ou bien, *via* le théorème du bon ordre, nous pouvons considérer que l'axiome nous permet d'affirmer que l'on peut toujours, par exemple dans le domaine existentiel (dénombrable), définir et caractériser sous l'angle de l'historicité, des opérations effectuées par le sujet (mise en bon ordre d'un ordre discret), voire les positions du sujet elles-mêmes (mise en bon ordre d'un ordre dense). En ce cas, il est clair qu'il faudra définir et préciser une correspondance avec l'imprédicativité et se situer vis-à-vis d'elle. En fait, cette question ne semble pas soulever de difficultés de principe importantes lorsqu'il s'agit de phénomènes humains : leurs caractérisations empiriques comme leurs définitions théoriques, lorsqu'elles existent, sont très souvent situées dans un cadre d'auto-référenciation qui semble propre aux constructions de significations (*cf.* par exemple notre discussion du chapitre XIII sur la définition des champs conceptuels et leurs classifications ; voir aussi l'analyse de Popper [11] à ce propos).

Sous un autre angle encore, et de façon peut-être plus concrète et tournée vers l'opérativité, l'axiome indique qu'une "manipulation" est toujours possible, au niveau de chaque domaine : en formant un ensemble fini, par choix d'un élément de chaque catégorie de base du domaine (elles sont en nombre fini, avons-nous vu, même si leur combinatoire peut être illimitée), on aboutit à une sorte d'hypostase réifiée et instrumentalisée du domaine, susceptible désormais de faire l'objet d'une maîtrise (le fini)[2].

Si on se situe du point de vue des qualités, l'axiome affirme que l'on peut isoler des composants appartenant aux configurations qui constituent ces qualités et que l'on peut rassembler ces composants pour caractériser une configuration nouvelle qui ne partage avec chacune des configurations de départ que le composant que l'on y a distingué.

Il semble en fait que l'aspect le plus général sous lequel cet axiome peut être interprété concerne la *détermination* de la phénoménalité elle-même. Soit que l'on considère qu'il rend possible d'opérer un "découpage" du donné, découpage qui caractérise la construction d'objets d'étude spécifiés

---

[1] Une définition ensembliste est dite imprédicative lorsqu'elle fait référence à une totalité à laquelle l'ensemble ainsi défini appartient lui-même. Remarquons à cette occasion que l'axiome de séparation est lui-même imprédicatif.

[2] On peut en trouver aisément des illustrations dans l'expérience : la réduction mutilante à partir des catégories phénoménales et le jeu de la combinatoire des éléments ainsi séparés constituent des instruments privilégiés des manipulations psychologiques ou sociales.

au sein d'une manifestation phénoménale complexe, soit que l'on considère qu'il rend possible la constitution conceptuelle de nouveaux objets d'étude à partir de ceux qui avaient été pris en compte.

IX. Schéma d'axiome de fondation

Il s'écrit (les z_j sont les variables libres de $f(x)$ autres que x et y n'est pas libre dans $f(x)$) :

$$(z_1)\ldots(z_n)\ [\mathrm{E}\ x\ f(x) \rightarrow \mathrm{E}\ x\ (f(x)\ \&\ (y)\ (y \in x \rightarrow {}^*f(y)))]$$

Il peut s'énoncer : "s'il y a un élément x qui remplisse la condition A (x), alors il existe un élément minimal qui remplit A (x)", c'est-à-dire : "aucun membre de cet élément minimal ne remplit A (x)".

Dans la théorie des ensembles, cet axiome affirme que les ensembles sont "bien fondés", c'est-à-dire que l'on peut les organiser en niveaux hiérarchiques tels que les ensembles d'un niveau ont pour éléments des ensembles de niveaux inférieurs, ce qui conduit à affirmer qu'il n'y a pas d'ensemble qui se contienne lui-même (l'image intuitive consiste à commencer, au niveau le plus bas, par des individus, puis, au niveau suivant, à former des ensembles d'individus, puis à un niveau encore plus élevé, à partir de ces ensembles, à en former de nouveaux, et ainsi de suite, démarche qui présente quelque parenté avec la théorie des types logiques). De plus, cet axiome entraîne la conséquence que tout ensemble est bien fondé ; il en résulte que l'on doit écarter le concept d'une hiérarchie enchevêtrée des niveaux et par conséquent de circularité à leur propos. De même se trouve éliminée la possibilité de régression infinie quant à la relation d'appartenance.

Du point de vue de l'interprétation, on peut considérer que l'admission ou le rejet de l'axiome de fondation est associé à deux attitudes épistémologiques et gnoséologiques fort différentes, que nous avons d'ailleurs déjà évoquées au titre des exemples du chapitre XIV : la démarche qui postule un réductionnisme total et celle qui fait appel aux concepts d'auto-organisation et d'auto-référence. En effet, si l'on admet l'axiome on sera conduit, par la correspondance, à poser un réductionnisme de principe des phénomènes humains (et des qualités). Les catégories seront considérées comme une organisation hiérarchique de niveaux, dont l'analyse, ni ne se boucle sur elle-même, ni ne régresse à l'infini, mais aboutit à la caractérisation de composants élémentaires (correspondants aux individus). Il s'agit donc bien d'une réduction analytique et atomistique des objets d'étude[1].

A l'inverse, la position qui consiste à accepter un point de vue de hiérarchie enchevêtrée, d'opérativité de l'auto-référence, de "clôture organisationnelle" (pour reprendre le vocabulaire de l'auto-organisation [12]), pour les catégories, revient à rejeter, relativement à la caractérisation des objets eux-mêmes, l'axiome de fondation : il peut y avoir des phénomènes qui sont "membres" d'eux-mêmes, des qualités qui s'appartiennent à elles-mêmes, etc. Il en va de même si l'on accepte une procédure de régression à l'infini de l'analyse phénoménale.

Ces considérations concernant une possible variation de l'axiomatique suivant les présupposés théoriques nous conduisent à introduire ici, pour la discuter, la distinction classique dans les sciences humaines et sociales entre modèle de l'observateur et modèle de la chose étudiée. La nécessité de cette distinction épistémologique est due, le plus souvent, à deux facteurs principaux qui coïncident parfois : le fait que l'observateur participe de l'objet à étudier et, plus généralement, le fait que la construction de l'objectivité de l'objet d'étude est par trop incomplète pour en permettre une formalisation suffisante. Nous avons largement analysé ces deux aspects dans la première partie de ce chapitre ainsi que dans le chapitre XIII (quand nous avons présenté les raisons que nous avions de recourir au paradigme du transfini pour modéliser des phénomènes humains) et nous n'y reviendrons pas. La question que nous voulons soulever brièvement est celle de savoir si cette distinction est pertinente dans l'établissement du cadre axiomatique lui-même : par exemple, le point de vue réductionniste qui tend à intégrer l'axiome de fondation et le point de vue "auto-", qui tendrait plutôt à l'écarter,

[1] De ce point de vue l'analyse que nous avons proposée des champs conceptuels (chapitre XIII) conduirait à conclure que les concepts comme tels ne forment pas toujours nécessairement des ensembles, puisque la caractérisation de l'idéologie fait appel à l'appartenance (médiée, mais effective) de certains concepts à eux-mêmes.

renvoient-ils à des controverses concernant des modèles de l'observateur ou, au contraire, et dans quelle mesure, renvoient-ils fondamentalement à la constitution de l'objectivité ?

Si seuls les modèles de l'observateur devaient gouverner la mise en place de l'axiomatique et de la formalisation qui peut en découler, il est clair que la perspective de constituer un réel cadre d'objectivation des phénomènes humains serait manquée. Dès lors, s'il s'agit de la caractérisation de l'objet théorique, la position axiomatique doit découler de la théorie et de sa confrontation avec la phénoménalité. A cet égard l'analyse que nous avons proposée à titre d'exemple (chapitre XIV, premier paragraphe) du problème épistémologique des rapports entre modèles relevant du réductionnisme et modèles relevant de l'approche "auto-" (à savoir rapports entre modèles dénombrables et modèles continus d'une même théorie formelle), tend à situer ce débat comme une controverse entre différents modèles de l'observateur plus que comme établissement d'une objectivité (qui serait donc à rechercher dans la théorie formelle en question). L'acceptation de l'axiome de fondation comme constitutif d'une théorie des phénomènes humains renvoie à une constructivité génétique puis épigénétique de ces phénomènes ; elle les rapporte à une évolution et à une histoire qui sont censées pouvoir en rendre compte complètement ; l'approche "auto-" peut alors être considérée comme un traitement de l'irréversibilité d'un processus à quoi on n'a pas toujours accès du fait que ses conditions initiales et les contraintes auxquelles il a pu être soumis nous échappent, et comme un traitement de la complexité (terme que nous devons prendre ici avec ses diverses connotations techniques) à laquelle il a abouti.

Une autre façon d'aborder la même question consiste à distinguer entre aspects épistémiques et aspects ontologiques des démarches et prises de position. Ainsi en va-t-il de la question de l'auto-référence, telle qu'elle se trouve engagée dans ce débat entre réductionnismes et théories auto-. Au niveau épistémique où elle se pose d'abord, elle reste très largement indépendante de la discussion précise sur l'axiomatique. L'analyse que nous en avons proposée en termes de rapports de cardinalités correspond à ce caractère épistémique de notre approche, du fait qu'elle se situe d'emblée dans un cadre *a priori* fourni par ZFC, cadre qui, à ce stade, ne fait pas lui-même l'objet d'une analyse approfondie. Mais l'enjeu change de nature, et l'on tend à passer de l'épistémique à l'ontologique, si l'on reporte la question au niveau axiomatique lui-même. En effet, l'axiomatique se veut constitutive de l'objet étudié et déterminante pour lui ; elle lui confère quasiment un statut ontologique. L'existence ou non de l'axiome de fondation joue alors un rôle essentiel quant à la recevabilité d'une attitude ou d'une autre, puisqu'elle intervient au stade de la constitution de l'objet.

Avec cette analyse des correspondances axiomatiques, nous avons donc essayé d'interpréter et de reformuler la série des axiomes de la théorie des ensembles ZFC en termes d'axiomes correspondants relatifs, cette fois, au cadre d'objectivation et d'intelligibilité des phénomènes humains tel que nous l'avons présenté. Pour conclure, nous résumerons cette analyse en rappelant cette liste et en tentant d'attribuer aux axiomes correspondants des noms, plus ou moins adéquats, transposés à ce cadre (nous avons mis entre parenthèses le nom ensembliste classique) :

I. (Extensionalité) : Axiome d'extensionalité
II (Paire) : Axiome d'appariement
III (Union) : Axiome d'analyse et de composition
IV (Parties) : Axiome d'organisation en niveaux
V (Séparation) : Axiome de caractérisation et d'ouverture
VI (Infini) : Axiome d'existence et d'inépuisabilité
VII (Remplacement) : Axiome d'interprétation et de traductibilité
VIII (Choix) : Axiome de détermination
IX (Fondation) : Axiome de réduction

Nous pensons être ainsi parvenu à étendre la portée du paradigme, que nous proposons loin, au-delà de la mise en correspondance proprement dite, de sa formalisation et de ses possibilités de calcul. En effet, c'est maintenant au niveau des fondements que peut se situer la comparaison et celle-ci permet de dégager et d'expliciter certains principes et certains postulats qu'induit l'application de ce paradigme dans l'objectivation et l'étude des phénomènes humains. Ce qui en permet une approche critique plus précise, en même temps qu'un éclairage épistémologique différent.

APPENDICE AU CHAPITRE XV

A.1. SUR LA QUESTION DES TYPES ET LE ROLE DE L'AXIOMATIQUE.

En métamathématique et théorie des modèles, des variétés *isomorphes* représentent le même *type* (une variété est un ensemble muni d'un système de relations et de fonctions, dont la mise en correspondance avec les symboles primitifs d'un langage logique constitue un modèle d'un système axiomatique, si les axiomes de ce système y sont des propositions vraies - on sait que deux modèles d'un même système d'axiomes ne sont pas nécessairement isomorphes, *cf.* les modèles non standard -). C'est en ce sens, comme l'a souligné Lorenzen [13], que Cantor a introduit le terme dans ses *types* d'ordre. C'est aussi dans ce sens que nous utilisons ces *types* d'ordre pour établir les correspondances avec des catégories à l'intérieur d'un domaine.

De ce fait, se trouve posée la question d'une autre correspondance, celle que l'on pourrait établir avec les systèmes axiomatiques et leurs langages de vérification, cette fois. Pourrait-on, dans l'esprit de notre démarche, mettre en rapport avec les catégories phénoménales que nous avons dégagées, non seulement des types d'ordre d'ensemble, mais aussi des modèles axiomatiques, de sorte que s'établisse une articulation (pas nécessairement biunivoque, d'ailleurs) entre des énoncés recteurs (axiomatiques) et des phénomènes référenciés (catégories), ainsi qu'il semble devoir en aller de toute normativité qualitative.

Ce n'est pas évident, car l'on sait que l'axiomatique sous-détermine le modèle et qu'il faut introduire des critères supplémentaires pour distinguer entre un modèle standard et un modèle qui ne l'est pas.

Par exemple, il semble naturel de faire intervenir systématiquement l'axiomatique de Peano (notamment par son schéma d'axiome d'induction) partout où l'association peut se faire avec le type d'ordre w (nombre ordinal). Ainsi, puisque ce type d'ordre a été mis en rapport avec la catégorie dite de l'*histoire* (sous l'angle des opérations effectives du sujet), on serait conduit à associer une axiomatique de type Peano pour cette suite (ce qui, du point de vue intuitif, n'a rien de choquant). Mais il est clair que le phénomène de sous-détermination du modèle par l'axiomatique exige de préciser ici que le modèle considéré est standard (sinon on peut obtenir, par exemple, le type d'ordre de *N (c'est-à-dire $w + (*w + w).\ h$), que l'on a associé à l'opérateur de transition entre le domaine fini et le domaine dénombrable). Il semble donc que le mieux que l'on puisse exiger est donc la spécification d'une axiomatique compatible, même si elle n'est pas catégorique. Une telle démarche reviendrait alors à dégager, et finalement à énoncer explicitement, une certaine cohérence paradigmatique qui soit relative à la phénoménalité envisagée.

Entre l'abstraction la plus formelle de ce qu'est un type d'ordre (en l'occurrence le couple $(h + 1, w)$) et l'abstraction la plus signifiante de la désignation d'une phénoménalité humaine (en l'occurrence, l'"histoire"), le système axiomatique jouerait alors un rôle (non univoque) d'articulation, de médiation, en ce que d'un côté il permet de "réaliser" formellement un type d'ordre et en ce que, de l'autre côté, il abstractise une phénoménalité censée correspondre à ce type d'ordre.

A.2. RECOURS AU TRANSFINI ET CONSIDERATIONS LOGIQUES.

Il peut être utile de souligner un point technique sur le rapport de notre approche, notamment dans son recours systématique aux propriétés de l'infini, avec certains aspects propres à la logique mathématique (dans la suite "$\in$" est le signe d'appartenance, "*" est la négation et "$\neq$" signifie "différent de").

La logique mathématique porte essentiellement sur des entités (individus, classes, relations) qui partagent la propriété fondamentale d'être des *éléments* ce qui s'exprime (*cf.* Quine, par exemple [14]) par la propriété d'appartenance à la classe universelle V ($x \in V$ peut se traduire : "x appartient à V" ou encore : "x est un élément"). Cette classe universelle elle-même, se caractérise comme celle de toutes les entités identiques à elles-mêmes : V = *û* (*u* = *u*), où *û* représente l'abstraction en terme de classe ("la classe des *u* tels que ..."). Par contraste, la propriété de ne pas être identique à soi-même caractérise la classe vide Y = *û* (*u* ≠ *u*).

Maintenant, il nous faut insister sur le point suivant : si nous nous situons d'un point de vue "métaconceptuel", les entités que nous voulons traiter en termes de phénomènes humains (ou de qualités) ont ceci de particulier, logiquement parlant, que, précisément elles ne sauraient être des éléments ($x^* \in$ V). En effet, excepté dans les cas de réification ou d'instrumentalisation - associés au fini et à la maîtrise -, d'une part elles ne se définissent pas en termes d'appartenance à des classes et, d'autre part, le principe d'identité, au sens de la logique mathématique, est problématique pour elles (ce qui permet d'ailleurs de mettre en valeur la question de la genèse et du devenir et, concomitamment, de ne pas pouvoir procéder à une réduction en termes d'attributs - c'est-à-dire de ne pas pouvoir ramener l'entité à une simple somme de ses propriétés -).

Or, précisément, il faut souligner que tout non-élément (toujours dans le cadre de la logique mathématique) diffère de quelque élément que ce soit d'une infinité de manières (c'est-à-dire, d'une infinité de membres de classe). Car, si ce n'était pas le cas et qu'il y ait simplement un nombre fini de caractérisations logiques qui fasse différer un non-élément d'un élément, on pourrait toujours ramener l'un à l'autre par une suite d'opérations. En particulier, tout non-élément diffère de Y et V par une infinité de nombres. Notre recours à des cardinalités infinies (sauf, justement, dans la modélisation de la domination et de la maîtrise) permet, en particulier, de rendre compte, formellement, d'une telle situation et d'éviter les réductions excessives.

REFERENCES DU CHAPITRE XV

[1] R. BLANCHE, *L'axiomatique*, PUF, Paris, 1980.
[2] P. DUMOUCHEL, J-P. DUPUY, Ed., *L'auto-organisation*, Colloque de Cerisy, Seuil, Paris, 1983.
[3] J. VUILLEMIN, *De la logique à la théologie. Cinq études sur Aristote*, Flammarion, Paris, 1967.
[4] J. BOUVERESSE, *La force de la règle*, Minuit, Paris, 1987.
[5] A.A FRAENKEL, Y. BAR-HILLEL, A. LEVY, *Foundations of Set Theory*, North-Holland, 1984.
[6] K.O. APEL, *L'éthique à l'âge de la science*, P.U Lille 1987.
[7] J. HABERMAS, *Morale et communication*, Le Cerf, Paris, 1986.
[8] K. GÖDEL, The Consistency of the Axiom of Choice and the Generalized Continuum Hypothesis, *Proc. Nat. Acad. Sci.* p.556, 1938.
[9] P.J. COHEN, *Set Theory and the Continuum Hypothesis*, Benjamin, Québec, 1966.
[10] G. HEINZMANN, *Entre intuition et analyse. Poincaré et le concept de prédicativité*, Blanchard, Paris, 1985.
[11] K. POPPER, Self Reference and Meaning in Ordinary Language, in : *Mind*, 63, p.162, O.U.P., 1954.
[12] F. VARELA, *Autonomie et connaissance*, Seuil, Paris, 1989.
[13] P. LORENZEN, *Métamathématique*, Gauthiers-Villars, Mouton, 1967.
[14] W.V.O. QUINE, *Mathematical Logic*, Harv. Univ. Press, 1983.