

AFSCET

Res-Systemica

Revue Française de Systémique
Fondée par Evelyne Andreewsky

Volume 12, novembre 2014
Modélisation des Systèmes Complexes

Res-Systemica, volume 12, article 16

De l'interprétation du principe de moindre action en mécanique classique à celle de la fonction d'onde en mécanique quantique

Michel Gondran et Alexandre Gondran

article reçu le 04 janvier 2015

exposé de Michel Gondran le 17 juin 2013



Creative Commons

De l'interprétation du principe de moindre action en mécanique classique à celle de la fonction d'onde en mécanique quantique

From the interpretation of the least action principle in classical mechanics to that of the wave function in quantum mechanics

Michel Gondran

*University Paris Dauphine, Lamsade, 75 016 Paris, France**

Alexandre Gondran

École Nationale de l'Aviation Civile, 31000 Toulouse, France†

Abstract

Nous montrons d'abord qu'il existe en mécanique classique trois actions différentes et que l'interprétation de ces trois actions permet de donner une réponse à deux grands problèmes de mécanique classique : l'interprétation du principe de moindre action et le paradoxe de Gibbs. Ces trois actions correspondent à des conditions initiales différentes: il s'agit de deux actions bien connues, l'action classique d'Euler-Lagrange $S_{cl}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0)$ qui relie une particule de position initiale \mathbf{x}_0 à sa position \mathbf{x} à l'instant t , l'action d'Hamilton-Jacobi $S(\mathbf{x}, t)$ qui relie une famille de particules d'action initiale $S_0(\mathbf{x})$ à leurs différentes positions \mathbf{x} à l'instant t , et une nouvelle action que nous introduisons, l'action singulière $S(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0)$ qui relie une particule de position initiale \mathbf{x}_0 et de vitesse initiale \mathbf{v}_0 à sa position \mathbf{x} à l'instant t .

L'interprétation du principe de moindre action est résolue en étudiant la différence existant entre l'action d'Hamilton-Jacobi et l'action d'Euler-Lagrange. L'action d'Hamilton-Jacobi est un champ. On montre que ce champ « pilote » la particule car la vitesse d'une particule en \mathbf{x} à l'instant t est donné par le gradient de l'action $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \nabla S(\mathbf{x}, t)/m$ où m est la masse de la particule. L'action d'Euler-Lagrange est l'action utilisée par un observateur pour déterminer à posteriori la trajectoire de la particule et sa vitesse initiale. On peut donc considérer l'action d'Euler-Lagrange comme une action épistémique et l'action d'Hamilton-Jacobi comme l'action ontologique.

Le paradoxe de Gibbs peut être résolu en mécanique classique si on sort du postulat habituel sur la discernabilité des particules classiques comme de très nombreux auteurs, comme Greiner, l'ont demandé: des particules indiscernées vérifiant les équations d'Hamilton-Jacobi statistiques et des particules discernées vérifiant les équations singulières d'Hamilton-Jacobi.

Nous montrons ensuite qu'il existe deux limites de l'équation de Schrödinger, quand on fait tendre la constante de Planck vers 0. Si la densité initiale est régulière, la densité et l'action quantique convergent vers la densité et l'action de particules classiques indiscernées vérifiant les équations statistiques d'Hamilton-Jacobi. Dans ce cas, l'interprétation de l'onde pilote de DeBroglie-Bohm devient naturelle. Si la densité initiale est singulière, l'action quantique converge vers l'action singulière d'une particule classique discernée vérifiant les équations singulières d'Hamilton-Jacobi. Dans ce cas, l'interprétation soliton proposée par Schrödinger en 1927 devient naturelle. Ces résultats sont la base de la théorie de la double interprétation de la mécanique quantique que nous proposons.

First, we show that there exist in classical mechanics three different actions and that, through the interpretation of these three actions, we can provide solutions to two major problems: the interpretation of the least action principle and the Gibbs paradox. These three actions correspond to different boundary conditions: two well-known actions, the Euler-Lagrange action $S_{cl}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0)$, which links a particle in this initial position \mathbf{x}_0 to its position \mathbf{x} at time t , the Hamilton-Jacobi action $S(\mathbf{x}, t)$, which links a family of particles of initial action $S_0(\mathbf{x})$ to their various positions \mathbf{x} at time t , and a new action, the singular action $S(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0)$, which links a particle in initial position \mathbf{x}_0 and initial velocity \mathbf{v}_0 to its position \mathbf{x} at time t .

The interpretation of the least action principle is solved by studying the difference between the Hamilton-Jacobi action and the Euler-Lagrange action. The Hamilton-Jacobi action is a field. We show that this field "pilots" the particle because the velocity of a particle at \mathbf{x} at time t is given by the gradient of the Hamilton-Jacobi action $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \nabla S(\mathbf{x}, t)/m$ where m is the mass of the particle. The Euler-Lagrange action is the action used by an observer to determine a posteriori the trajectory of the particle and its initial velocity. We can therefore consider the Euler-Lagrange action as an epistemic action and the Hamilton-Jacobi action as the ontological action.

The Gibbs paradox can be solved in classical mechanics if one abandons the usual assumptions on the discernibility of classical particles as very many authors such as Greiner, have recommended: non-discerned particles satisfying the Hamilton-Jacobi statistics equations and discerned particles satisfying the singular Hamilton-Jacobi equations.

We then show that there are two limits of the Schrödinger equation, when the Planck constant tends to 0. If the initial density is regular, quantum density and quantum action converge to the density and the action of non-discerned classical particles satisfying Hamilton-Jacobi statistical equations. In this case, the interpretation of the de Broglie-Bohm pilot wave becomes natural. If the initial density is singular, quantum action converges to the action of a discerned classical particle satisfying Hamilton-Jacobi singular equations. In this case, the soliton interpretation proposed by Schrödinger in 1927 becomes natural. These results are the foundation of the double interpretation theory of quantum mechanics that we propose.

I. INTRODUCTION

Le débat si intense qui a lieu depuis plus de 80 ans sur l'interprétation de la fonction d'onde de la mécanique quantique a laissé dans l'ombre le débat sur l'interprétation de l'action et du principe de moindre action en mécanique classique, depuis leur introduction en 1744 par Pierre-Louis Moreau de Maupertuis (1698-1759)¹:

" *L'Action est proportionnelle au produit de la masse par la vitesse et par l'espace; Maintenant, voici ce principe, si sage, si digne de l'Etre Suprême: Lorsqu'il arrive quelque changement dans la Nature, la quantité d'Action employée pour ce changement est toujours la plus petite qu'il soit possible.* "

Maupertuis avait compris que, sous certaines conditions, les équations de Newton sont équivalentes au fait qu'une quantité, qu'il appelle l'action, soit minimale. Ce *principe de moindre action* est le principe le plus puissant à notre disposition pour découvrir les lois de la nature. Il permet de déterminer sous la même approche aussi bien les équations du mouvement des particules (si on minimise sur les trajectoires) que les lois de la nature (si on minimise sur les paramètres définissant les champs).

Cependant, pour les trajectoires de particules, ce principe embarasse un grand nombre de scientifiques comme le rappelle Henri Poincaré, pourtant l'un de ses grands utilisateurs^{2,3}:

"*L'énoncé même du principe de moindre action a quelque chose de choquant pour l'esprit. Pour se rendre d'un point à un autre, une molécule matérielle, soustraite à l'action de toute force, mais assujettie à se mouvoir sur une surface, prendra la ligne géodésique, c'est-à-dire le chemin le plus court. Cette molécule semble connaître le point où on veut la mener, prévoir le temps qu'elle mettra à l'atteindre en suivant tel et tel chemin, et choisir ensuite le chemin le plus convenable. L'énoncé nous la présente pour ainsi dire comme un être animé et libre; Il est clair qu'il vaudrait mieux le remplacer par un énoncé moins choquant, et où, comme diraient les philosophes, les causes finales ne sembleraient pas se substituer aux causes efficientes.*"

Nous allons voir, dans les paragraphes 2, 3 et 4, que les difficultés d'interprétation de l'action sur les *causes finales* et les *causes efficientes* proviennent de l'existence de deux actions différentes: l'action classique (ou d'Euler-Lagrange) $S_{cl}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0)$ qui relie une particule de position initiale \mathbf{x}_0 à sa position \mathbf{x} à l'instant t , et l'action d'Hamilton-Jacobi $S(\mathbf{x}, t)$ qui relie une famille de particules d'action initiale $S_0(\mathbf{x})$ à leurs différentes positions \mathbf{x} à l'instant

t.

L'interprétation du principe de moindre action est résolue en étudiant la différence existant entre l'action d'Hamilton-Jacobi et l'action d'Euler-Lagrange. Mathématiquement, la relation fondamentale qui les lie s'écrit:

$$S(\mathbf{x}, t) = \min_{\mathbf{x}_0} (S_0(\mathbf{x}_0) + S_{cl}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0)). \quad (1)$$

où le minimum est pris sur l'ensemble des positions initiales \mathbf{x}_0 . Cette équation est l'analogue en mécanique classique de l'intégrale de chemin de Feynman qui relie en mécanique quantique la fonction d'onde à l'action classique. C'est une intégrale dans l'analyse Minplus que nous avons introduit en 1996, et que nous appelons *l'intégrale de chemin Minplus*. Elle va avoir un rôle déterminant dans l'étude de la convergence de la mécanique quantique vers la mécanique classique. Les actions d'Hamilton-Jacobi et d'Euler-Lagrange vérifient toutes les deux les équations d'Hamilton-Jacobi, mais avec des conditions initiales très différentes: régulières pour l'action d'Hamilton-Jacobi, singulières pour l'action d'Euler-Lagrange (paragraphe 4). On rappelle que l'action d'Hamilton-Jacobi est un champ qui « pilote » la particule au moyen du champ de vitesse:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \nabla S(\mathbf{x}, t)/m \quad (2)$$

où m est la masse de la particule.

On montre alors que l'on peut répondre clairement à l'interrogation de Poincaré : la véritable action qui a une interprétation physique et qui n'utilise pas les causes finales dans le principe de moindre action est l'action d'Hamilton-Jacobi (paragraphe 2); l'action d'Euler-Lagrange qui utilise les causes finales n'est pas l'action physique, mais l'action utilisée par un observateur pour déterminer a posteriori la trajectoire de la particule et sa vitesse initiale (paragraphe 3).

A ce problème sur le principe de moindre action s'ajoute en mécanique classique le paradoxe de Gibbs⁴: *Lorsqu'on calcule l'entropie d'un mélange de deux gaz identiques en équilibre, le calcul par la mécanique classique avec des particules discernables conduit à une entropie double de celle que l'on attend. Si l'on remplace ces particules par des particules indiscernables, alors le facteur lié à l'indiscernabilité conduit au bon résultat.* On considère habituellement, dans presque tous les cours de mécanique statistique, que ce paradoxe, énoncé par Gibbs dès 1889, n'a été " résolu " qu'avec la mécanique quantique plus de 35 ans plus tard, grâce à l'introduction du postulat d'indiscernabilité pour les particules quantiques

identiques. C'est en effet Einstein qui introduit en 1924 l'indiscernabilité des molécules d'un gaz parfait, en même temps que la statistique de Bose-Einstein. Mais, comme le fait remarquer Henri Bacry (Bacry 1992, p.129)⁵, "*le déroulement historique aurait pu être différent. En effet, en toute logique, on aurait pu postuler le principe d'indiscernabilité pour sauver le paradoxe de Gibbs... ce principe peut être adjoint aussi bien à l'ensemble des postulats de la mécanique quantique qu'à celui de la mécanique classique*".

Cette remarque de Bacry a été faite par un très grand nombre d'auteurs (Landé 1965, p.68)⁶, Leinaas et Myrheim (Leinaas 1976)⁷. Cependant, comme le note Greiner dans son cours de mécanique statistique (Greiner 1999, p.151-152)⁸, la solution n'est pas si simple car il y a des cas où il faut considérer les particules classiques comme indiscernables et d'autres cas où il faut les considérer comme discernables:

" *Le facteur correctif de Gibbs est par conséquent effectivement la bonne recette pour éviter le paradoxe de Gibbs. Dorénavant nous tiendrons toujours compte du facteur correctif de Gibbs lorsque nous compterons les états microscopiques pour des états indiscernables. Soulignons cependant que ce facteur n'est qu'une recette pour éviter les contradictions de la mécanique statistique classique. Dans le cas d'objets discernables (par exemple, des atomes qui se trouvent en certains points d'une maille) le facteur de Gibbs ne doit pas être ajouté. Dans la théorie classique les particules restent discernables. Nous rencontrerons encore fréquemment cette inconsistance en mécanique classique.*"

Cependant, les définitions actuelles des livres de cours - par exemple celles de Basdevant et Dalibard⁹: "*en mécanique classique, deux particules dans un système sont toujours discernables*" et "*en mécanique quantique, deux particules identiques sont indiscernables*" - ne répondent pas aux problèmes concrets posés par Greiner *et al*⁸. tant en mécanique statistique classique qu'en mécanique statistique quantique.

En proposant une définition de la discernabilité et de l'indiscernabilité en mécanique classique, nous montrons comment il est possible de sortir des ambiguïtés et en particulier du paradoxe de Gibbs. C'est l'objet du paragraphe 5 où nous introduisons les particules indiscernées vérifiant les équations d'Hamilton-Jacobi statistiques et du paragraphe 6 où nous introduisons les particules discernées vérifiant les équations singulières d'Hamilton-Jacobi.

Dans une seconde partie, paragraphes 7, 8 et 9, nous étudions la convergence de la mécanique quantique vers la mécanique classique lorsque l'on fait tendre la constante de Planck vers 0. Nous montrons qu'il existe deux limites de l'équation de Schrödinger. Si la

densité initiale est régulière, la densité et l'action quantique convergent vers la densité et l'action de particules classiques indiscernées vérifiant les équations statistiques d'Hamilton-Jacobi. Dans ce cas, l'interprétation de l'onde pilote de DeBroglie-Bohm devient naturelle. Si la densité initiale est singulière, l'action quantique converge vers l'action singulière d'une particule classique discernée vérifiant les équations singulières d'Hamilton-Jacobi. Dans ce cas, l'interprétation soliton proposée par Schrödinger en 1927 devient naturelle. Ces résultats sont la base de la théorie de la double interprétation de la mécanique quantique que nous proposons.

II. L'ACTION D'EULER-LAGRANGE

Considérons l'évolution d'un système évoluant de la position \mathbf{x}_0 à l'instant initial vers la position \mathbf{x} à l'instant t où la variable de commande $\mathbf{u}(s)$ est la vitesse:

$$\frac{d\mathbf{x}(s)}{ds} = \mathbf{u}(s) \quad \text{pour } s \in [0, t] \quad (3)$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}. \quad (4)$$

Si $L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$ est le lagrangien du système, quand les deux positions \mathbf{x}_0 et \mathbf{x} sont données, l'action d'Euler-Lagrange $S_{cl}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0)$ est la fonction définie par:

$$S_{cl}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0) = \min_{\mathbf{u}(s), 0 \leq s \leq t} \left\{ \int_0^t L(\mathbf{x}(s), \mathbf{u}(s), s) ds \right\} \quad (5)$$

où le minimum (ou plus généralement l'extremum) de (5) est pris sur les commandes $\mathbf{u}(s)$, $s \in [0, t]$, l'évolution de l'état $\mathbf{x}(s)$ étant donnée par les équations d'évolution (3) (4). C'est le principe de moindre action définie par Euler¹⁰ en 1744 et Lagrange¹¹ en 1755.

La solution $(\tilde{\mathbf{u}}(s), \tilde{\mathbf{x}}(s))$ de (5), si le lagrangien $L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$ est deux fois différentiable, vérifie les équations d'Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s), s) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s), s) = 0 \quad \text{pour } s \in [0, t] \quad (6)$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}. \quad (7)$$

On rappelle que ces équations ne sont que des conditions nécessaires d'optimalité. Pour une particule non relativiste dans un champ de potentiel linéaire avec le lagrangien $L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 + \mathbf{K} \cdot \mathbf{x}$, l'équation (6) donne $\frac{d}{ds}(m\dot{\mathbf{x}}(s)) - \mathbf{K} = 0$. Nous obtenons successivement

$\tilde{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{v}_0 + \frac{\mathbf{K}}{m}s$, $\tilde{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0s + \frac{\mathbf{K}}{2m}s^2$. La vitesse initiale \mathbf{v}_0 est obtenue en faisant $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}$ (équation (7)) dans la dernière équation. Finalement, la trajectoire optimisant l'action est

$$\tilde{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{x}_0 + \frac{s}{t}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) - \frac{\mathbf{K}}{2m}ts + \frac{\mathbf{K}}{2m}s^2 \quad (8)$$

et l'action d'Euler-Lagrange est égale à

$$S_{cl}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0) = m \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2}{2t} + \frac{K \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{x}_0)}{2}t - \frac{K^2}{24m}t^3. \quad (9)$$

La figure 1 montre différentes trajectoires allant de \mathbf{x}_0 au temps $t = 0$ à \mathbf{x} au temps final t . La trajectoire parabolique $\tilde{\mathbf{x}}(s)$ correspond à celle qui réalise le minimum dans l'équation (5).

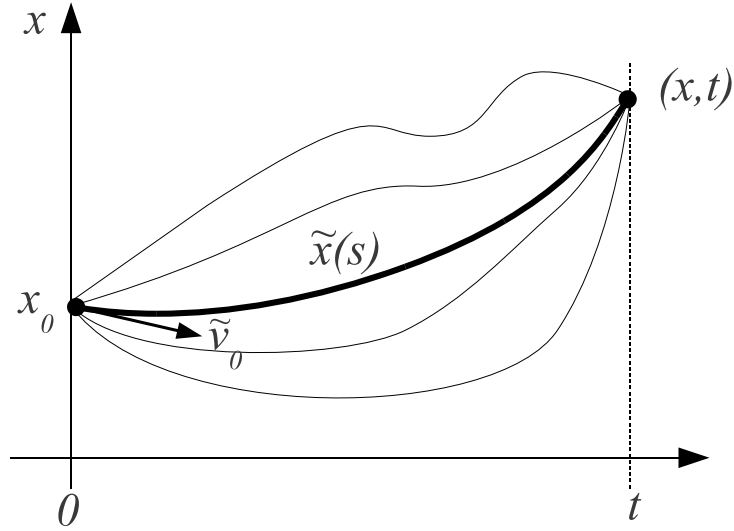


FIG. 1: Différentes trajectoires $x(s)$ ($0 \leq s \leq t$) entre $(x_0, 0)$ et (x, t) , et la trajectoire optimale $\tilde{x}(s)$ avec $\tilde{\mathbf{v}}_0 = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{t} - \frac{Kt}{2m}$.

L'équation (5) semble montrer que, parmi les trajectoires qui arrivent à (\mathbf{x}, t) à partir de la position initiale \mathbf{x}_0 , le principe de moindre action permet de choisir la vitesse à chaque instant. En réalité, le principe de moindre action utilisé dans l'équation (5) ne choisit pas la vitesse à chaque instant s entre 0 et t , mais seulement quand la particule arrive en \mathbf{x} à l'instant t . La connaissance de la vitesse à chaque instant s ($0 \leq s \leq t$) requiert la résolution des équations d'Euler-Lagrange (6,7) sur la trajectoire entière. Dans le cas d'une particule non relativiste dans un potentiel linéaire, la vitesse à l'instant s ($0 \leq s \leq t$) est

$\tilde{\mathbf{v}}(s) = \frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}_0}{t} - \frac{Kt}{2m} + \frac{Ks}{m}$ avec pour vitesse initiale

$$\tilde{\mathbf{v}}_0 = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{t} - \frac{Kt}{2m}. \quad (10)$$

On en déduit que la vitesse initiale $\tilde{\mathbf{v}}_0$ dépend de la position \mathbf{x} de la particule à l'instant final t . Cette dépendance des "causes finales" est générale. C'est la principale critique de Poincaré sur le principe de moindre action: "*Cette molécule semble connaître le point où on veut la mener, prévoir le temps qu'elle mettra à l'atteindre en suivant tel et tel chemin, et choisir ensuite le chemin le plus convenable.*"

Nous devons donc conclure que, sans connaissance de la vitesse initiale, l'action d' Euler-Lagrange répond à un problème posé par un observateur, et non par la Nature: "*Quel doit être la vitesse de la particule à l'instant initial pour atteindre \mathbf{x} au temps t ?*" La résolution de ce problème implique que l'observateur résolve les équations d'Euler-Lagrange (6,7) après l'observation de \mathbf{x} au temps t . C'est un point de vue *a posteriori*.

III. L'ACTION D'HAMILTON-JACOBI

Considérons maintenant qu'une action initiale $S_0(\mathbf{x})$ est donnée, alors l'action d'Hamilton-Jacobi $S(\mathbf{x}, t)$ est la fonction définie par:

$$S(\mathbf{x}, t) = \min_{\mathbf{x}_0; \mathbf{u}(s), 0 \leq s \leq t} \left\{ S_0(\mathbf{x}_0) + \int_0^t L(\mathbf{x}(s), \mathbf{u}(s), s) ds \right\} \quad (11)$$

où le minimum (et plus généralement l'extremum) de (11) est pris sur toutes les positions initiales \mathbf{x}_0 et sur les commandes $\mathbf{u}(s)$, $s \in [0, t]$, l'évolution de l'état $\mathbf{x}(s)$ étant donnée par les équations d'évolution (3) (4).

Comme le terme $S_0(\mathbf{x}_0)$ n'intervient pas dans (11) pour la minimisation (ou l'extremum) sur $\mathbf{u}(s)$, on en déduit que l'action d'Hamilton-Jacobi peut s'écrire à partir de l'action d'Euler-Lagrange:

$$S(\mathbf{x}, t) = \min_{x_0} (S_0(\mathbf{x}_0) + S_{cl}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0)). \quad (12)$$

Cette équation est une généralisation de la formule de Hopf-Lax^{13, 14} $S(\mathbf{x}, t) = \min_{x_0} (S_0(\mathbf{x}_0) + m \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^2}{2t})$ qui correspond au cas particulier où il n'y a pas de potentiel et donc à une action d'Euler-Lagrange égale à $m \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^2}{2t}$.

Pour une particule dans un potentiel linéaire $V(\mathbf{x}) = -\mathbf{K} \cdot \mathbf{x}$ avec comme action initiale $S_0(\mathbf{x}) = m\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{x}$, nous déduisons des équations (12) et (9) que l'action d'Hamilton-Jacobi

est égale à:

$$S(\mathbf{x}, t) = m\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{x} - \frac{1}{2}m\mathbf{v}_0^2 t + \mathbf{K} \cdot \mathbf{x}t - \frac{1}{2}\mathbf{K} \cdot \mathbf{v}_0 t^2 - \frac{\mathbf{K}^2 t^3}{6m}. \quad (13)$$

La figure 2 montre les trajectoires classiques (paraboles décrites par l'équation (8)) partant de différents points \mathbf{x}_0^i au temps $t = 0$ et arrivant au point \mathbf{x} au temps final t . L'action d'Hamilton-Jacobi (13) est calculée à partir de ces trajectoires.

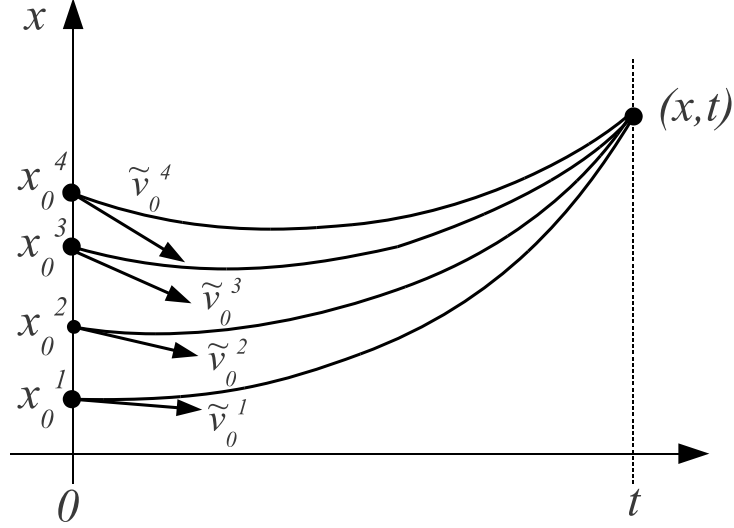


FIG. 2: Trajectoires classiques $\tilde{\mathbf{x}}(s)$ ($0 \leq s \leq t$) entre les différentes positions initiales \mathbf{x}_0^i et la position \mathbf{x} au temps t . Notons les différentes vitesses initiales $\tilde{\mathbf{v}}_0^i = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0^i}{t} - \frac{\mathbf{K}t}{2m}$.

Lorsque l'action d'Hamilton-Jacobi $S(\mathbf{x}, t)$ définie par (11) existe, elle vérifie l'équation d'optimalité:

$$S(\mathbf{x}, t) = \min_{\mathbf{u}(s), t-dt \leq s \leq t} \left\{ S\left(\mathbf{x} - \int_{t-dt}^t \mathbf{u}(s) ds, t\right) + \int_{t-dt}^t L\left(\mathbf{x} - \int_s^t \mathbf{u}(w) dw, \mathbf{u}(s), s\right) ds \right\}. \quad (14)$$

Si on suppose S différentiable en \mathbf{x} et t , L différentiable en \mathbf{x} , \mathbf{u} et t et $\mathbf{u}(t)$ continue, l'équation (14) devient:

$$0 = \min_{\mathbf{u}(t)} \left\{ -\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(t) dt - \frac{\partial S}{\partial t}(\mathbf{x}, t) dt + L(\mathbf{x}, \mathbf{u}(t), t) dt + o(dt) \right\} \quad (15)$$

c'est à dire en divisant par dt et en faisant tendre dt vers 0^+ ,

$$\frac{\partial S}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = \min_{\mathbf{u}} \left\{ L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) - \mathbf{u} \cdot \frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, t) \right\}$$

soit:

$$\frac{\partial S}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + H\left(\mathbf{x}, \frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}}, t\right) = 0$$

où $H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$ est la transformée de Fenchel-Legendre par rapport à \mathbf{u} de $L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$.

On rappelle qu'à toute fonction convexe $f(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ on peut associer sa *transformée de Fenchel-Legendre* $\widehat{f}(\mathbf{r}) : \mathbf{r} \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par:

$$\widehat{f}(\mathbf{r}) = \max_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{u} - f(\mathbf{u})). \quad (16)$$

THEOREM 1 - *Si l'action d'Hamilton-Jacobi est assez régulière, elle vérifie les équations d'Hamilton-Jacobi:*

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(\mathbf{x}, \frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}}, t) = 0 \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \quad (17)$$

$$S(\mathbf{x}, 0) = S_0(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad (18)$$

Dans le cas d'une particule non relativiste dans un champ de potentiel $V(\mathbf{x}, t)$, on a $L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 - V(\mathbf{x}, t)$, d'où $H(\mathbf{x}, \nabla S, t) = \max_{\mathbf{u}} (\mathbf{u} \cdot \nabla S - \frac{1}{2}m\mathbf{u}^2 + V(\mathbf{x}, t))$, et donc à l'optimum $m\mathbf{u} = \nabla S$. On en déduit $H(\mathbf{x}, \nabla S) = \frac{1}{2m}(\nabla S)^2 + V(\mathbf{x}, t)$ et le théorème suivant:

THEOREM 2 - *La vitesse d'une particule classique non relativiste dans un champ de potentiel est donnée en chaque point (\mathbf{x}, t) par:*

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\nabla S(\mathbf{x}, t)}{m} \quad (19)$$

où $S(\mathbf{x}, t)$ est l'action d'Hamilton-Jacobi, solution des équations d'Hamilton-Jacobi:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}(\nabla S)^2 + V(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \quad (20)$$

$$S(\mathbf{x}, 0) = S_0(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (21)$$

L'équation (19) montre que la solution $S(\mathbf{x}, t)$ des équations d'Hamilton-Jacobi permet de définir le champ de vitesse en tout point (\mathbf{x}, t) à partir du champ de vitesse $\frac{\nabla S_0(\mathbf{x})}{m}$ à l'instant initial. En particulier, si à l'instant initial, on connaît la position initiale \mathbf{x}_{init} d'une particule, sa vitesse à cet instant est égale à $\frac{\nabla S_0(\mathbf{x}_{init})}{m}$. On en déduit qu'à partir de la solution $S(\mathbf{x}, t)$ des équations d'Hamilton-Jacobi, on déduit par (19) la trajectoire de la particule. L'action d'Hamilton-Jacobi $S(\mathbf{x}, t)$ est donc un champ qui "pilote" le mouvement de la particule.

Pour une particule dans un potentiel linéaire $V(\mathbf{x}) = -\mathbf{K} \cdot \mathbf{x}$ avec l'action initiale $S_0(\mathbf{x}) = m\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{x}$, le champ de la vitesse initiale est constant, $\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \frac{\nabla S_0(\mathbf{x})}{m} = \mathbf{v}_0$ et le champ de la

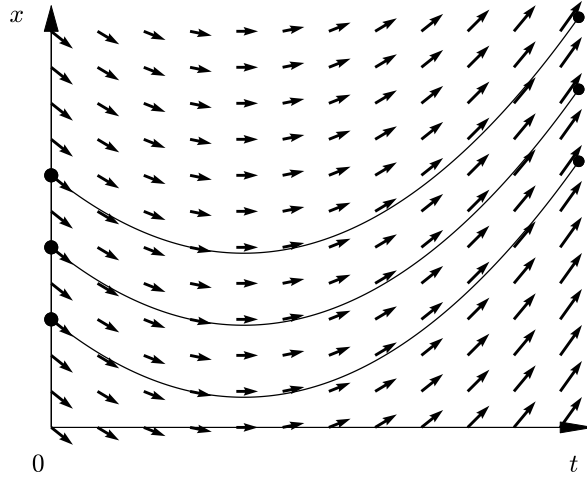


FIG. 3: Champ de vitesse correspondant à l'action d'Hamilton-Jacobi $S(\mathbf{x}, t) = m\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{x} - \frac{1}{2}m\mathbf{v}_0^2 t + \mathbf{K} \cdot \mathbf{x}t - \frac{1}{2}\mathbf{K} \cdot \mathbf{v}_0 t^2 - \frac{\mathbf{K}^2 t^3}{6m}$, soit $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\nabla S(\mathbf{x}, t)}{m} = \mathbf{v}_0 + \frac{\mathbf{K}t}{m}$. On a aussi représenté trois trajectoires de particules pilotées par ce champ.

vitesse à l'instant t est aussi constant, $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\nabla S(\mathbf{x}, t)}{m} = \mathbf{v}_0 + \frac{\mathbf{K}t}{m}$. La figure 3 montre ces champs de vitesse.

L'équation (11) semble montrer que, parmi les trajectoires qui arrivent à (\mathbf{x}, t) à partir d'une position initiale inconnue et un champ de vitesse connu, le principe de moindre action choisit la position initiale et à chaque instant la vitesse qui correspond au minimum (ou l'extremum) de l'action d'Hamilton-Jacobi.

Les équations (19), (20) et (21) confirment cette interprétation. Elles montrent que l'action d'Hamilton-Jacobi $S(\mathbf{x}, t)$ ne résoud pas seulement un problème donné avec une simple condition initiale $(\mathbf{x}_0, \frac{\nabla S_0(\mathbf{x}_0)}{m})$, mais un ensemble de problèmes avec une infinité de conditions initiales, toutes les paires $(\mathbf{y}, \frac{\nabla S_0(\mathbf{y})}{m})$. L'action d'Hamilton-Jacobi répond à la question: "*Si on connaît l'action (ou le champ de vitesse) à l'instant initial, peut-on déterminer l'action (ou le champ de vitesse) à chaque instant ultérieur?*" Ce problème est résolu séquentiellement par l'équation d'évolution (20). C'est un point de vue *a priori*. Il peut être considéré comme le problème résolu par la Nature avec le principe de moindre action.

IV. LES ACTIONS D'EULER-LAGRANGE ET D'HAMILTON-JACOBI DANS L'ANALYSE MINPLUS

Il existe une nouvelle branche des mathématiques, l'analyse MINPLUS, qui permet d'étudier certains problèmes non linéaires de la physique, comme l'équation d'Hamilton-Jacobi, par des approches linéaires, cf. Maslov¹⁵ et Gondran^{16,17}. Le principe est de remplacer le produit scalaire habituel $\int_X f(x)g(x)dx$ par le produit scalaire MINPLUS:

$$(f, g) = \inf_{x \in X} \{f(x) + g(x)\} \quad (22)$$

Cela revient à remplacer dans le produit scalaire le corps classique des réels $(\mathbb{R}, +, \times)$ par la structure algébrique *MINPLUS* $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \min, +)$, c'est-à-dire l'ensemble des réels (auquel on a ajouté un élément infini $\{+\infty\}$) muni de l'opération Min (minimum de deux réels) à la place de l'addition, et de l'opération $+$ (somme de deux réels) à la place de la multiplication. L'élément $\{+\infty\}$ correspond à l'élément neutre pour l'opération Min, $\text{Min}(\{+\infty\}, a) = a \forall a \in \mathbb{R}$.

Une telle approche correspond à un analogue de *la théorie des distributions dans le cas non linéaire* ; l'opérateur est ici "linéaire" continu par rapport à la structure MINPLUS et non "linéaire" continu par rapport à la structure classique des réels $(\mathbb{R}, +, \times)$. Dans cette structure algébrique, l'équation d'Hamilton-Jacobi est linéaire, car si $S_1(\mathbf{x}, t)$ et $S_2(\mathbf{x}, t)$ sont solutions de (20), alors $\min\{\lambda + S_1(\mathbf{x}, t), \mu + S_2(\mathbf{x}, t)\}$ est aussi solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi (20). L'analogue de la distribution de Dirac $\delta(\mathbf{x})$ dans l'analyse MINPLUS est la distribution non linéaire $\delta_{\min}(\mathbf{x})$ définie par $\delta_{\min}(\mathbf{x}) = \{0 \text{ si } \mathbf{x} = \mathbf{0}, +\infty \text{ sinon}\}$. Avec cette distribution de Dirac non linéaire, on peut définir des solutions élémentaires d'une manière analogue à la théorie classique des distributions. On a en particulier:

THEOREM 3 - *L'action d'Euler-Lagrange, $S_{cl}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0)$, définie par l'équation (5) est la solution élémentaire de l'équation d'Hamilton-Jacobi (20)(21) dans l'analyse MINPLUS avec la condition initiale*

$$S(\mathbf{x}, 0) = \delta_{\min}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \{0 \quad \text{si } \mathbf{x} = \mathbf{x}_0, \quad +\infty \quad \text{sinon}\}. \quad (23)$$

L'action d'Hamilton-Jacobi $S(\mathbf{x}, t)$ est alors donnée par l'intégrale MINPLUS

$$S(\mathbf{x}, t) = \inf_{\mathbf{x}_0} \{S_0(\mathbf{x}_0) + S_{cl}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0)\} \quad (24)$$

d'une manière analogue à la solution de l'équation de la chaleur donnée par l'intégrale classique:

$$u(x, t) = \int u_0(y) \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy.$$

Cette integrale MINPLUS est l'analogue en mécanique classique de l'intégrale de chemins de Feynmann en mécanique quantique. Nous l'appellons donc *l'intégrale de chemin MINPLUS*.

Dans cette analyse MINPLUS, la transformée de Legendre-Fenchel correspond à l'analogue de la transformée de Fourier lorsque l'on passe de l'espace des fonctions $L^2(\mathbb{R}^n)$ à l'espace des fonctions convexes sci propres. Cette transformation a une grande importance en physique: c'est d'abord la transformation qui permet de passer du lagrangien à l'hamiltonien et réciproquement. C'est aussi la correspondance qui permet de passer du micro au macro en mécanique statistique et qui est à la base de l'analyse multifractale de la turbulence en mécanique des fluides¹⁸. La propriété essentielle pour le passage entre le micro et le macro en mécanique statistique est l'équivalence suivante

$$\int_X e^{f(x)} dx \simeq e^{\inf_{x \in X} \{f(x)\}}$$

liée au théorème de la phase stationnaire quand $\epsilon \rightarrow 0^+$. C'est aussi le théorème de la phase stationnaire que nous utiliserons pour étudier la convergence de la mécanique quantique vers la mécanique classique au paragraphe 7.

Rappelons enfin comment ces deux actions (Euler-Lagrange et Hamilton-Jacobi) permettent de retrouver l'équation fondamentale de la dynamique. En prenant le gradient de l'équation d'Hamilton-Jacobi (20):

$$\frac{\partial^2 \mathcal{S}}{\partial t \partial x_i} + \frac{1}{m} \sum_j \frac{\partial^2 \mathcal{S}}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x_j} + \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0,$$

et en tenant compte de $m\mathbf{v} = \nabla S$ et de

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 \mathcal{S}}{\partial t \partial x_i} + \sum_j \frac{\partial^2 \mathcal{S}}{\partial x_i \partial x_j} v_j$$

on retrouve bien l'équation fondamentale de la dynamique classique:

$$\frac{d}{dt} (m\mathbf{v}) = -\nabla V. \tag{25}$$

V. PARTICULES INDISCERNÉES EN MÉCANIQUE CLASSIQUE, ÉQUATIONS STATISTIQUES D'HAMILTON-JACOBI ET PARADOXE DE GIBBS

En mécanique classique, on considère habituellement qu'une particule est ponctuelle et qu'elle est décrite par sa masse m , sa charge si elle en a une, ainsi que par sa position \mathbf{x}_0 et sa vitesse \mathbf{v}_0 à l'instant initial. Si la particule est soumise à un champ de potentiel $V(\mathbf{x})$, on peut déduire sa trajectoire car son évolution future est donnée par les équations de Newton. C'est la raison pour laquelle les particules classiques sont considérées comme *discernables*. Nous allons montrer cependant, dans ce paragraphe et le suivant, qu'il est possible de proposer une définition de la discernabilité et de l'indiscernabilité pour une particule classique, suivant la façon dont elle est préparée

En effet, comme nous venons de le voir, si la particule classique est représentée par l'action d'Hamilton-Jacobi $S(\mathbf{x}, t)$, la situation est plus complexe car l'action d'Hamilton-Jacobi $S(\mathbf{x}, t)$ ne résoud pas seulement un problème donné avec une seule condition initiale $(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0)$, mais un ensemble de problèmes avec une infinité de conditions initiales, tous les couples $(\mathbf{x}, \frac{\nabla S_0(\mathbf{x})}{m})$.

Nous pouvons donc conclure que les équations d'Hamilton-Jacobi ne sont pas une bonne modélisation du problème physique d'une particule dans un potentiel $V(\mathbf{x}, t)$ et ayant comme condition initiale $(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0)$.

Considérons alors un faisceau de particules classiques identiques issues d'un canon comme les canons à électrons, à atomes ou encore à molécules de CO_2 ou de fullerènes C_{60} . Au niveau très macroscopique, on peut considérer un canon à balles de tennis. Pour une particule de ce faisceau, on ne connaît à l'instant initial ni sa position exacte, ni sa vitesse exacte, mais seulement les caractéristiques décrivant le faisceau, c'est-à-dire une densité de probabilité initiale $\rho_0(\mathbf{x})$ et un champ de vitesse initial $\mathbf{v}_0(\mathbf{x})$. On est alors conduit à la définition suivante:

Definition 1 - Nous appellerons *particules indiscernées* une famille de particules classiques préparées de la même manière dont on ne connaît à l'instant initial que la densité de probabilité initiale $\rho_0(\mathbf{x})$ et l'action initiale $S_0(\mathbf{x})$, c'est-à-dire le champ de vitesse initial $\frac{\nabla S_0(\mathbf{x})}{m}$.

La densité de probabilité $\rho(\mathbf{x}, t)$ et l'action $S(\mathbf{x}, t)$ à l'instant t d'une particule indiscernée est alors donnée par le théorème suivant:

THEOREM 4 - La densité $\rho(\mathbf{x}, t)$ et l'action $S(\mathbf{x}, t)$ de particules classiques indiscernées, soumises à un potentiel $V(\mathbf{x}, t)$, vérifient **les équations statistiques d'Hamilton-Jacobi**:

$$\frac{\partial S(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{1}{2m}(\nabla S(\mathbf{x}, t))^2 + V(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \quad (26)$$

$$S(\mathbf{x}, 0) = S_0(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \quad (27)$$

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \text{div} \left(\rho(\mathbf{x}, t) \frac{\nabla S(\mathbf{x}, t)}{m} \right) = 0 \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \quad (28)$$

$$\rho(\mathbf{x}, 0) = \rho_0(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \quad (29)$$

On rappelle que la vitesse en chaque point (\mathbf{x}, t) est donnée par $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\nabla S(\mathbf{x}, t)}{m}$. On note que l'équation d'Hamilton-Jacobi (26) est entièrement découplé de l'équation de continuité (28).

Nous avons appelé ces particules indiscernées, et non indiscernables, car si on connaissait leurs positions initiales, on connaîtrait aussi leurs trajectoires. Cependant elles auront dans les dénombrements les mêmes propriétés que l'on accorde habituellement aux particules indiscernables. Ainsi, si on tire au hasard dans la densité initiale $\rho_0(\mathbf{x})$ N particules identiques, les $N!$ permutations de ces N particules sont strictement équivalentes et ne correspondent, comme pour les particules indiscernables, qu'à une seule configuration. On en déduit que, si X est l'espace des coordonnées d'un système d'une particule indiscernée, le vrai espace de configuration d'un système de N particules indiscernées n'est pas le produit cartésien X^N , mais l'espace obtenu par identification des points de X^N représentant la même configuration, c'est-à-dire l'espace X^N/S^N quotient de X^N par le groupe S^N des $N!$ permutations. C'est la division par $N!$ qui permet d'obtenir la bonne valeur de l'entropie du mélange du paradoxe de Gibbs. Dans ce cadre, le paradoxe de Gibbs n'en est plus un car il s'applique à N particules indiscernées dont les différentes permutations correspondent à une seule configuration, ce qui donne la bonne valeur de l'entropie.

VI. PARTICULES DISCERNÉES EN MÉCANIQUE CLASSIQUE ET ÉQUATIONS SINGULIÈRES D'HAMILTON-JACOBI

Definition 2 - Nous dirons qu'une **particule classique est discernée** à l'instant initial, si on connaît, à cet instant, sa position \mathbf{x}_0 et sa vitesse \mathbf{v}_0 .

Remarquons que N particules discernées à un instant donné peuvent devenir indiscernées à un instant futur si elles interagissent entre elles. Par contre, l'indiscernabilité à un instant donné va se conserver aux instants ultérieurs. La notion d'indiscernabilité que nous introduisons est donc liée au mode de préparation de la particule.

Quel type d'action peut-on associer à une telle particule discernée (conditions initiales $(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0)$) dans un potentiel $V(\mathbf{x}, t)$?

THEOREM 5 - Si $\xi(t)$ est la trajectoire classique dans le champ $V(\mathbf{x}, t)$ d'une particule de position initiale \mathbf{x}_0 et de vitesse initiale \mathbf{v}_0 , alors il existe une action

$$S(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0) = m \frac{d\xi(t)}{dt} \cdot \mathbf{x} + g(t) \quad (30)$$

où $g(t) = - \int_0^t \frac{1}{2} m \left(\frac{d\xi(s)}{ds} \right)^2 + V(\xi(s)) + m \frac{d^2 \xi(s)}{ds^2} \cdot \xi(s) ds$, que nous appellerons l'action singulière, et qui est solution des **équations singulières d'Hamilton-Jacobi**:

$$\frac{\partial S(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0)}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}=\xi(t)} + \frac{1}{2m} (\nabla S(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0))^2 \Big|_{\mathbf{x}=\xi(t)} + V(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}=\xi(t)} = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad (31)$$

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = \frac{\nabla S(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0)}{m} \Big|_{\mathbf{x}=\xi(t)} \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad (32)$$

$$S(\mathbf{x}, 0; \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0) = m \mathbf{v}_0 \mathbf{x} \quad \text{et} \quad \xi(0) = \mathbf{x}_0. \quad (33)$$

L'action singulière vérifie les équations singulières d'Hamilton-Jacobi seulement le long de la trajectoire $\xi(t)$. On peut considérer ces équations singulières d'Hamilton-Jacobi comme la recherche du couple (action d'Hamilton-Jacobi $S(\mathbf{x}, t)$, densité $\rho(\mathbf{x}, t)$) vérifiant les équations suivantes:

$$\frac{\partial S(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{1}{2m} (\nabla S(\mathbf{x}, t))^2 + V(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (34)$$

$$S(\mathbf{x}, 0) = m \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{x} \quad (35)$$

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \text{div} \left(\rho(\mathbf{x}, t) \frac{\nabla S(\mathbf{x}, t)}{m} \right) = 0 \quad (36)$$

$$\rho(\mathbf{x}, 0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (37)$$

où $\delta(\mathbf{x})$ est la distribution de Dirac: $\delta(\mathbf{x}) = \{+\infty \text{ si } \mathbf{x} = 0, 0 \text{ sinon}\}$ et $\int_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}_0)$.

L'intérêt d'une telle action liée à une trajectoire unique localisée est d'abord théorique en proposant un cadre mathématique au cas d'une particule discernée. Cette action prend son véritable sens au paragraphe 8 lorsque l'on montre qu'une particule classique vérifiant cette action singulière correspond à la limite, lorsque l'on fait tendre la constante de Planck h vers 0, de la fonction d'onde d'une particule quantique dans un état cohérent.

VII. CONVERGENCE DE L' ÉQUATION DE SCHRÖDINGER QUAND $\hbar \rightarrow 0$ VERS LES ÉQUATIONS STATISTIQUES D'HAMILTON-JACOBI: PARTICULES INDISCERNÉES

Considérons la fonction d'onde $\Psi(\mathbf{x}, t)$ vérifiant l' équation de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + V(\mathbf{x}, t) \Psi \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \quad (38)$$

$$\Psi(\mathbf{x}, 0) = \Psi_0(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \quad (39)$$

Dans le changement de variable $\Psi(\mathbf{x}, t) = \sqrt{\rho^h(\mathbf{x}, t)} \exp(i\frac{S^h(\mathbf{x}, t)}{\hbar})$, la densité $\rho^h(\mathbf{x}, t)$ et l'action $S^h(\mathbf{x}, t)$ sont des fonctions qui dépendent à priori de \hbar . L'équation de Schrödinger se décompose en donnant les équations de Madelung¹⁹ (1926) qui correspondent aux deux équations couplées:

$$\frac{\partial S^h(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{1}{2m} (\nabla S^h(\mathbf{x}, t))^2 + V(\mathbf{x}, t) - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta \sqrt{\rho^h(\mathbf{x}, t)}}{\sqrt{\rho^h(\mathbf{x}, t)}} = 0 \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \quad (40)$$

$$\frac{\partial \rho^h(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \text{div}(\rho^h(\mathbf{x}, t) \frac{\nabla S^h(\mathbf{x}, t)}{m}) = 0 \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \quad (41)$$

avec comme conditions initiales

$$\rho^h(\mathbf{x}, 0) = \rho_0^h(\mathbf{x}) \quad \text{et} \quad S^h(\mathbf{x}, 0) = S_0^h(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \quad (42)$$

Le terme $Q^h(\mathbf{x}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta \sqrt{\rho^h}}{\sqrt{\rho^h}}$ qui s'ajoute au potentiel $V(\mathbf{x})$ dans l'équation (40) est habituellement appelé le potentiel quantique.

Étudions la convergence de la densité $\rho^h(\mathbf{x}, t)$ et l'action $S^h(\mathbf{x}, t)$ des équations de Madelung, lorsque l'on fait tendre la constante de Planck \hbar vers 0. Cette convergence est subtile et demeure dans le cas général une énigme. Nous nous restreindrons dans ce paragraphe à des particules statistiquement préparées.

Definition 3 - Une particule quantique est dite **statistiquement préparée** si sa densité de probabilité initiale $\rho_0^h(\mathbf{x})$ et son action initiale $S_0^h(\mathbf{x})$ convergent, quand $\hbar \rightarrow 0$, vers des fonctions régulières $\rho_0(\mathbf{x})$ and $S_0(\mathbf{x})$.

Le cas des particules statistiquement préparées correspond par exemple à un ensemble de particules sans interaction entre elles et préparées de la même façon: jets de particules libres ou de particules dans un champ linéaire, jets de fullerenes dans une expérience de fentes de Young, jets d'atomes dans des expériences de Stern et Gerlach.

THEOREM 6 ^{20,21} *Pour des particules quantiques statistiquement préparées, la densité de probabilité $\rho^h(\mathbf{x}, t)$ et l'action $S^h(\mathbf{x}, t)$, solutions des équations de Madelung (40)(41)(42), convergent, quand $\hbar \rightarrow 0$, vers la densité classique $\rho(\mathbf{x}, t)$ et l'action classique $S(\mathbf{x}, t)$, solutions des équations statistiques d'Hamilton-Jacobi:*

$$\frac{\partial S(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{1}{2m}(\nabla S(\mathbf{x}, t))^2 + V(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (43)$$

$$S(\mathbf{x}, 0) = S_0(\mathbf{x}) \quad (44)$$

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \text{div} \left(\rho(\mathbf{x}, t) \frac{\nabla S(\mathbf{x}, t)}{m} \right) = 0 \quad (45)$$

$$\rho(\mathbf{x}, 0) = \rho_0(\mathbf{x}). \quad (46)$$

Nous donnons quelques indications sur la démonstration de ce théorème et nous proposons une interprétation. Considérons le cas où la fonction d'onde $\Psi(\mathbf{x}, t)$ au temps t s'écrit à partir de la fonction d'onde initiale $\Psi_0(\mathbf{x}_0)$ par l'intégrale de chemins de Feynman²³:

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \int F(t, \hbar) \exp \left(\frac{i}{\hbar} S_{cl}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0) \right) \Psi_0(\mathbf{x}_0) d\mathbf{x}_0 \quad (47)$$

où $F(t, \hbar)$ est une fonction indépendante de \mathbf{x} et de \mathbf{x}_0 . Feynman²³ (p.58 et suivantes) montre que c'est en particulier le cas à partir du lagrangien quadratique en x et \dot{x} suivant:

$$L = a(t)\dot{x}^2 + b(t)x\dot{x} + c(t)x^2 + d(t)\dot{x} + e(t)x + f(t). \quad (48)$$

Par exemple, pour $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + e(t)x$, on a $F(t, \hbar) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar t}}$ et pour $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + e(t)x$, on a $F(t, \hbar) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i \hbar \sin \omega t}}$.

Pour une particule quantique statistiquement préparée, la fonction d'onde s'écrit $\Psi(\mathbf{x}, t) = F(t, \hbar) \int \sqrt{\rho_0^h(\mathbf{x}_0)} \exp(\frac{i}{\hbar}(S_0^h(\mathbf{x}_0) + S_{cl}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0))) d\mathbf{x}_0$. Le théorème de la phase stationnaire montre alors que, si \hbar tend vers 0, nous avons $\Psi(\mathbf{x}, t) \sim \exp(\frac{i}{\hbar} \min_{\mathbf{x}_0} (S_0(\mathbf{x}_0) + S_{cl}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0)))$, ce qui entraîne que l'action quantique $S^h(\mathbf{x}, t)$ converge vers la fonction

$$S(\mathbf{x}, t) = \min_{\mathbf{x}_0} (S_0(\mathbf{x}_0) + S_{cl}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0)) \quad (49)$$

qui est la solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi (43) avec la condition initiale (44). De plus, comme la densité quantique $\rho^h(\mathbf{x}, t)$ vérifie l'équation de continuité (41), nous déduisons, puisque $S^h(\mathbf{x}, t)$ tend vers $S(\mathbf{x}, t)$, que $\rho^h(\mathbf{x}, t)$ converge vers la densité classique $\rho(\mathbf{x}, t)$, qui vérifie l'équation de continuité (45). Nous obtenons les deux convergences annoncées.

Dans le cas particulier d'une particule quantique dans un champ de potentiel linéaire $V(\mathbf{x}) = -\mathbf{K} \cdot \mathbf{x}$, considérons les conditions initiales suivantes:

$$\rho_0^{\hbar}(\mathbf{x}) = \rho_0(\mathbf{x}) = (2\pi\sigma_0^2)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{(\mathbf{x}-\xi_0)^2}{2\sigma_0^2}} \quad \text{et} \quad S_0^{\hbar}(\mathbf{x}) = S_0(\mathbf{x}) = m\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{x}. \quad (50)$$

où σ_0 , \mathbf{v}_0 , ξ_0 et \mathbf{K} sont des constantes données indépendantes de \hbar . La densité $\rho^{\hbar}(\mathbf{x}, t)$ et l'action $S^{\hbar}(\mathbf{x}, t)$, solutions des équations de Madelung (40)(41)(42) avec la condition initiale (50), sont alors égales à²⁴:

$$\rho^{\hbar}(\mathbf{x}, t) = (2\pi\sigma_h^2(t))^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{(\mathbf{x}-\xi_0-\mathbf{v}_0 t-\mathbf{K}\frac{t^2}{2m})^2}{2\sigma_h^2(t)}} \quad (51)$$

$$S^{\hbar}(\mathbf{x}, t) = -\frac{3\hbar}{2} t g^{-1}(\hbar t/2m\sigma_0^2) - \frac{1}{2} m\mathbf{v}_0^2 t + m\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{x} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{x} t - \frac{1}{2} \mathbf{K} \cdot \mathbf{v}_0 t^2 - \frac{\mathbf{K}^2 t^3}{6m} + \frac{(\mathbf{x} - \xi_0 - \mathbf{v}_0 t - \mathbf{K} \frac{t^2}{2m})^2 \hbar^2 t}{8m\sigma_0^2 \sigma_h^2(t)} \quad (52)$$

avec

$$\sigma_h(t) = \sigma_0 \left(1 + (\hbar t/2m\sigma_0^2)^2\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (53)$$

Quand \hbar tend vers 0, $\sigma_h(t)$ converge vers σ_0 et, pour tout \mathbf{x} et t bornés, la densité $\rho^{\hbar}(\mathbf{x}, t)$ et l'action $S^{\hbar}(\mathbf{x}, t)$ convergent uniformément vers

$$\rho(\mathbf{x}, t) = (2\pi\sigma_0^2)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{(\mathbf{x}-\xi_0-\mathbf{v}_0 t-\mathbf{K}\frac{t^2}{2m})^2}{2\sigma_0^2}} \quad \text{et} \quad S(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{2} m\mathbf{v}_0^2 t + m\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{x} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{x} t - \frac{1}{2} \mathbf{K} \cdot \mathbf{v}_0 t^2 - \frac{\mathbf{K}^2 t^3}{6m}. \quad (54)$$

solutions des équations statistiques d'Hamilton-Jacobi (43)(44)(45)(46). On vérifie que l'action de l'équation (54) est bien égale à l'action d'Hamilton-Jacobi de l'équation (13) du paragraphe 3.

Remarquons aussi que, quand \hbar tend vers 0, pour tout \mathbf{x} et t bornés, le "potentiel quantique" $Q^{\hbar}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta \sqrt{\rho^{\hbar}}}{\sqrt{\rho^{\hbar}}} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[-\frac{3}{2\sigma_h^2(t)} + \frac{(\mathbf{x}-\xi_0-\mathbf{v}_0 t-\mathbf{K}\frac{t^2}{2m})^2}{4\sigma_h^4(t)}\right]$ tend vers 0.

Notre particule quantique statistiquement préparée, qui vérifiait l'équation de Schrödinger, va, lorsque l'on fait tendre \hbar vers 0, vérifier les équations statistiques d'Hamilton-Jacobi d'un ensemble de particules classiques indiscernées. Pour une telle particule classique indiscernée, la position initiale est inconnue, seule est connue la densité de probabilité de la position initiale. En mécanique classique, la connaissance de $\rho_0(\mathbf{x})$ et $S_0(\mathbf{x})$ ne donnent que le comportement statistique des particules (particules classiques indiscernées). Cependant, on peut déduire de ces équations statistiques le comportement déterministe

d'une particule classique particulière si on ajoute à ces équations statistiques la position initiale de cette particule. Les équations statistiques d'Hamilton-Jacobi sont donc incomplètes pour une particule classique particulière. Il devrait en est de même avec l'équation de Schrödinger pour connaître l'évolution d'une particule quantique. Il faut donc ajouter à l'équation de Schrödinger la position initiale de la particule quantique, comme il faut ajouter la position initiale de la particule classique aux équations statistiques d'Hamilton-Jacobi.

Nous concluons qu'une particule quantique statistiquement préparée n'est pas complètement décrite par sa fonction d'onde. IL est nécessaire d'ajouter sa position initiale et il est alors naturel d'introduire l'interprétation de de Broglie-Bohm²⁵⁻²⁸. Une telle particule quantique doit être considérée *indiscernée*, comme la particule classique vers laquelle converge ses équations. Dans cette interprétation, les deux premiers postulats de la mécanique quantique, décrivant l'état quantique et son évolution, doivent être complétées. A l'instant initial $t = 0$, l'état de la particule quantique statistiquement préparée est donné par la fonction d'onde initiale $\Psi_0(\mathbf{x})$ (un paquet d'ondes) et sa position initiale $\mathbf{X}(0)$; c'est le nouveau premier postulat. Le second nouveau postulat donne l'évolution de la fonction d'onde et de la position à partir du champ de vitesse $\mathbf{v}^h(\mathbf{x},t) = \frac{\nabla S^h(\mathbf{x},t)}{m}$. Les autres postulats qui décrivent la mesure ne sont pas nécessaire. Ils sont remplacés par un seul, l'hypothèse de l'équilibre quantique²⁹, qui décrit l'interaction entre la fonction d'onde initiale $\Psi_0(\mathbf{x})$ et la distribution de probabilité de la position initiale de la particule $\mathbf{X}(0)$:

$$P[\mathbf{X}(0) = \mathbf{x}] = |\Psi_0(\mathbf{x})|^2. \quad (55)$$

La figure 4 montre une simulation des trajectoires de Broglie-Bohm pour l'expérience des deux fentes de Jönsson's³⁰ où un canon à électrons émet des électrons un à un à travers un trou de quelques micromètres de rayon. Les électrons, préparés de la même façon, sont représentés par la même fonction d'onde initiale, mais non par la même position initiale. Dans la simulation, ces positions initiales sont tirées au hasard dans le paquet d'onde initial. Nous avons représenté seulement les trajectoires traversant une des deux fentes.

La figure 5 montre les 100 trajectoires précédentes quand la constante de Planck est divisée respectivement par 10, 100, 1000 and 10000. Nous obtenons, quand h tend vers 0, la convergence des trajectoires quantiques vers les trajectoires classiques.

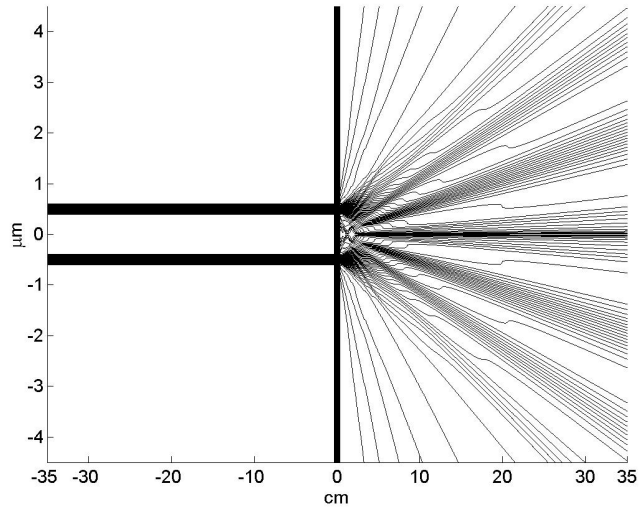


FIG. 4: 100 trajectoires d'électron dans l'expérience de Jönsson.

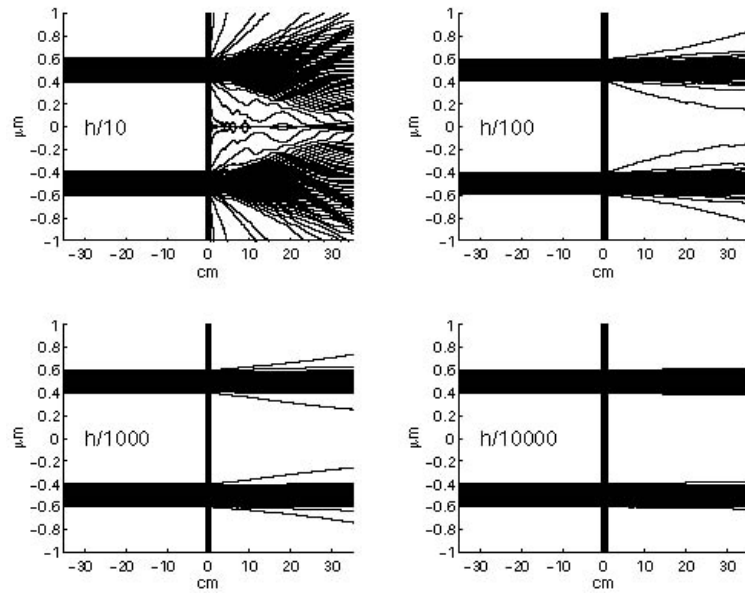


FIG. 5: Convergence de 100 trajectoires d'électrons quand h est divisé par 10, 100, 1 000 et 10 000.

VIII. CONVERGENCE DE L'ÉQUATION DE SCHRÖDINGER QUAND $\hbar \rightarrow 0$ VERS LES ÉQUATIONS SINGULIÈRES D'HAMILTON-JACOBI: PARTICULE DISCERNÉE

Dans ce paragraphe, nous étudions la convergence pour des particules quantiques préparées de manière singulière.

Definition 4 - Une particule quantique est dite *préparée de manière singulière* si sa densité de probabilité initiale $\rho_0^{\hbar}(\mathbf{x})$ et son action initiale $S_0^{\hbar}(\mathbf{x})$ convergent, quand $\hbar \rightarrow 0$, respectivement vers une distribution de Dirac $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ et une fonction régulière $S_0(\mathbf{x})$.

Cette situation correspond en particulier aux états cohérents, introduits en 1926 par Schrödinger³¹. La théorie quantique des champs et la seconde quantification sont construit sur ces états cohérents³². L'existence pour l'atome d'hydrogène d'un paquet d'onde localisé dont le mouvement est une trajectoire classique (un vieux rêve de Schrödinger's) a été prédit en 1994 par Białynicki-Birula, Kalinski, Eberly, Buchleitner et Delande³³⁻³⁵, et découvert récemment par Maeda et Gallagher³⁶ pour des atomes de Rydberg.

La figure 6 montre un paquet d'ondes de la forme d'une banane calculé dans un champ de fréquence de 30 GHz avec un nombre quantique principal égal à 60. Le paquet est approximativement à quatre mille rayons de Bohr du noyau et tourne autour de lui dans le plan horizontal sans changer de forme.³⁴

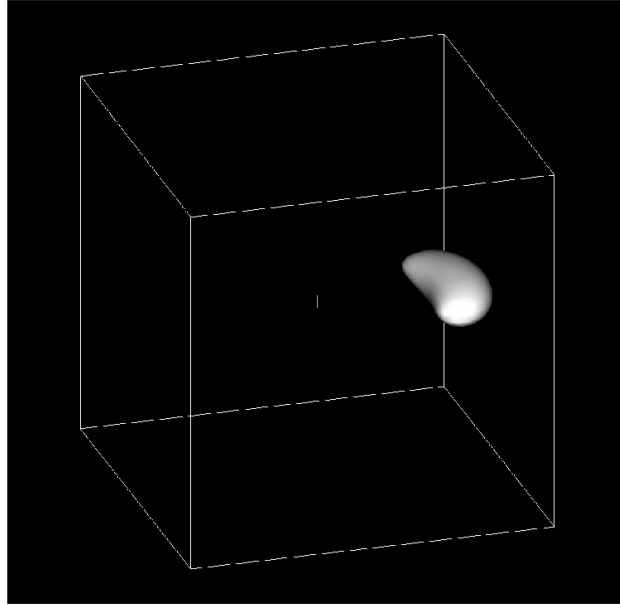


FIG. 6: Paquet d'ondes cohérent de l'atome d'hydrogène (Buchleitner et Delande, 1995)³⁴.

L'étude de la convergence des équations de Madelung pour des particules quantiques semi-classiques préparées de manière singulière est mathématiquement très difficile. Nous étudierons seulement l'exemple d'un état cohérent où un calcul explicite est possible.

Pour l'oscillateur harmonique à deux dimensions, $V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}m\omega^2\mathbf{x}^2$, les états cohérents sont construit²⁴ à partir de la fonction d'onde initiale $\Psi_0(\mathbf{x})$, qui correspond à la densité et

à l'action initiale

$$\rho_0^h(\mathbf{x}) = (2\pi\sigma_h^2)^{-1} e^{-\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^2}{2\sigma_h^2}} \quad \text{et} \quad S_0^h(\mathbf{x}) = m\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{x} \quad (56)$$

avec $\sigma_h = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$. Nous vérifions que, quand $\hbar \rightarrow 0$, $\rho_0^h(\mathbf{x})$ converge vers la distribution de Dirac $\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)$ et que $S_0^h(\mathbf{x}) = S_0^h(\mathbf{x})$ est une fonction régulière. Avec ces conditions initiales, la densité $\rho^h(\mathbf{x}, t)$ et l'action $S^h(\mathbf{x}, t)$, solutions des équations de Madelung (40)(41)(42), sont égales à²⁴:

$$\rho^h(\mathbf{x}, t) = (2\pi\sigma_h^2)^{-1} e^{-\frac{(\mathbf{x}-\xi(t))^2}{2\sigma_h^2}} \quad \text{et} \quad S^h(\mathbf{x}, t) = +m\frac{d\xi(t)}{dt} \cdot \mathbf{x} + g(t) - \hbar\omega t \quad (57)$$

où $\xi(t)$ est la trajectoire d'une particule classique soumis dans le potentiel $V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}m\omega^2\mathbf{x}^2$, avec \mathbf{x}_0 and \mathbf{v}_0 comme position et vitesse initiale et $g(t) = \int_0^t (-\frac{1}{2}m(\frac{d\xi(s)}{ds})^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\xi(s)^2)ds$.

THEOREM 7 ^{20,21} - *Pour l'oscillateur harmonique avec les conditions initiales (56), quand $\hbar \rightarrow 0$, la densité $\rho^h(\mathbf{x}, t)$ et l'action $S^h(\mathbf{x}, t)$ convergent vers*

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x} - \xi(t)) \quad \text{and} \quad S(\mathbf{x}, t) = m\frac{d\xi(t)}{dt} \cdot \mathbf{x} + g(t) \quad (58)$$

où $S(\mathbf{x}, t)$ et les trajectoires $\xi(t)$ sont solutions des équations singulières d'Hamilton-Jacobi:

$$\frac{\partial S(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}=\xi(t)} + \frac{1}{2m}(\nabla S(\mathbf{x}, t))^2 \Big|_{\mathbf{x}=\xi(t)} + V(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}=\xi(t)} = 0 \quad (59)$$

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = \frac{\nabla S(\mathbf{x}, t)}{m} \Big|_{\mathbf{x}=\xi(t)} \quad (60)$$

$$S(\mathbf{x}, 0) = m\mathbf{v}_0\mathbf{x} \quad \text{and} \quad \xi(0) = \mathbf{x}_0. \quad (61)$$

Par conséquent, la cinématique du paquet d'ondes converge vers la cinématique d'un oscillateur harmonique unique décrite par $\xi(t)$, correspondant à une *particule classique* dont on connaît la position et la vitesse (particule classique discernée). Contrairement au cas des particules statistiques semi-classiques, il est alors possible²² de considérer que la fonction d'onde puisse correspondre à une seule particule quantique. Une telle particule quantique doit être considérée *discernée*, comme la particule classique vers laquelle converge ses équations. Le cas des particules quantiques préparées de manière singulière peut alors être en accord avec l'interprétation de Copenhague de la fonction d'onde où toute l'information sur la particule est donnée par la fonction d'onde. L'interprétation la plus plausible est alors celle proposée par Schrödinger³¹ en 1926 pour les états cohérents de l'oscillateur harmonique. Dans

l'interprétation de Schrödinger, la particule quantique préparée de manière singulière est une particule « étendue », représentée par un paquet d'ondes dont le centre suit une trajectoire classique. On peut alors montrer que la relation d'incertitude d'Heisenberg correspond à une relation de dispersion entre les différentes parties de la particule. Dans cette interprétation des particules quantiques préparées de manière singulière, les deux premiers postulats usuels de la mécanique quantique sont conservés. Les autres sont non nécessaires. Alors le centre de la particule est donné par la valeur moyenne de la position ($X(t) = \int x |\Psi(\mathbf{x}, t)|^2 dx$) et vérifie le théorème d'Ehrenfest³⁷.

Nous postulons que le champ de vitesse quantique est maintenant $\mathbf{v}^h(\mathbf{x}, t) = \frac{\nabla S^h(\mathbf{x}, t)}{m} + \frac{\hbar}{2m} \nabla \ln \rho^h(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{k}$ où \mathbf{k} est le vecteur unitaire parallèle au spin. Pour l'oscillateur harmonique 2D, ce champ de vitesse est égal à $\mathbf{v}^h(\mathbf{x}, t) = \xi(t) + \omega \mathbf{k} \times (\mathbf{x} - \xi(t))$. Alors, la particule étendue (soliton) a le même mouvement qu'une toupie 2D.

IX. CONCLUSION

La distinction en mécanique classique des actions d'Hamilton-Jacobi et d'Euler-Lagrange, fondée sur l'intégrale de chemin Minplus, nous a permis de mieux comprendre le principe de moindre action: l'action d'Euler-Lagrange répond à un problème posé par un observateur et serait donc épistémique, l'action d'Hamilton-Jacobi correspond à un problème résolu par la Nature à partir du principe de moindre action et serait donc ontologique. Cette action d'Hamilton-Jacobi est un champ qui « pilote » la particule.

De plus, l'introduction en mécanique classique des concepts de particules indiscernées vérifiant les équations statistiques d'Hamilton-Jacobi, et de particules discernées vérifiant les équations singulières d'Hamilton-Jacobi permet de donner une réponse simple au paradoxe de Gibbs de la mécanique statistique classique.

Enfin l'étude de la convergence des équations de Madelung quand \hbar tend vers 0 nous conduit à considérer les deux cas suivants dépendant de la préparation des particules quantiques:

1) Les particules quantiques statistiquement préparées convergent vers des particules classiques indiscernées et peuvent être considérées comme des particules quantiques indiscernées. Pour elles, l'interprétation de l'onde pilote de Broglie-Bohm s'impose et tout se passe comme si la phase de la fonction d'onde "pilotait" la particule.

2) Les particules quantiques préparées de manière singulière convergent vers des particules classiques discernées et peuvent être considérées comme des particules quantiques discernées. Pour elles, l'interprétation de l'onde pilote de Broglie-Bohm ne s'impose plus car la fonction d'onde suffit pour représenter les particules comme dans l'interprétation de Copenhague. Dans ce cas, l'interprétation la plus naturelle est l'interprétation de Schrödinger où la fonction d'onde représente une particule étendue.

La double interprétation que nous proposons suivant les hypothèses de préparation n'est pas entièrement nouvelle. Elle a été pressentie sous des formes un peu différentes par Einstein et de Broglie.

Pour de Broglie, sa véritable interprétation est la théorie de la double solution qu'il a introduite dès 1927 et dont l'onde-pilote n'est qu'un sous produit: *J'introduisais, sous le nom de "théorie de la double solution" l'idée qu'il fallait distinguer deux solutions distinctes, mais intimement reliées à l'équation des ondes, l'une que j'appelais l'onde u étant une onde physique réelle et non normable comportant un accident local définissant la particule et représenté par une singularité, l'autre, l'onde Ψ de Schrödinger, normable et dépourvue de singularité, qui ne serait qu'une représentation de probabilités.*²⁶

Nous avons repris cette idée de Louis de Broglie de l'existence d'une onde statistique Ψ et d'une onde soliton u ; cependant il ne s'agit pas ici d'une double solution, mais d'une double interprétation de la fonction d'onde suivant les conditions initiales: l'onde statistique correspond au cas indiscerné, l'onde soliton au cas discerné.

Le point de vue d'Einstein est bien synthétisé dans l'un de ces derniers écrits (1953), "*Réflexions élémentaires concernant l'interprétation des fondements de la mécanique quantique*" en hommage à Max Born:

Le fait que l'équation de Schrödinger, associée à l'interprétation de Born, ne conduise pas à une description des "états réels" d'un système individuel incite naturellement à rechercher une théorie qui ne soit pas soumise à cette limitation. Les deux tentatives jusqu'à maintenant dans ce sens ont ceci en commun qu'elles conservent l'équation de Schrödinger et abandonnent l'interprétation de Born. La première tentative, qui constitue un retour à de Broglie, a été poursuivie avec beaucoup de finesse par Bohm.... La deuxième tentative en vue d'obtenir une "description réelle" d'un système individuel qui soit fondée sur l'équation de Schrödinger est toute récente et émane de Schrödinger lui-même. L'idée générale est, en bref, la suivante: la fonction ψ représente en elle-même la réalité

et point n'est besoin de lui adjoindre l'interprétation statistique de Born.... Des considérations précédentes, il résulte que la seule interprétation de l'équation de Schrödinger jusqu'à présent admissible est l'interprétation statistique donnée par Born. Cependant, celle-ci ne donne pas la "description réelle" du système individuel, elle ne produit que des énoncés statistiques relatifs à des ensembles de systèmes.³⁸

Ainsi Einstein envisage d'une part l'interprétation de Broglie, d'autre part les solitons liés aux états cohérents introduits par Schrödinger pour l'oscillateur harmonique. Mais comme il n'envisage pas de séparer le cas des fonctions d'ondes statistique (interprétation de Broglie-Bohm) du cas des fonctions d'ondes soliton (interprétation de Schrödinger), il réfute chacune de ces deux approches.

* Electronic address: michel.gondran@polytechnique.org

† Electronic address: alexandre.gondran@enac.fr

- ¹ de Maupertuis, P.L.: Accord de différentes lois de la nature qui avaient jusqu'ici paru incompatibles. Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, p.417-426 (Paris,1744); reprint in: Oeuvres, 4, 1-23 Reprografischer Nachdruck der Ausg. Lyon (1768).
- ² Poincaré, H.: *La Science et l'Hypothèse*. Flammarion, (1902); Translated in: The Foundations of Sciences: Science and Hypothesis, The value of Science, Science and Method. New York: Science Press (1913).
- ³ F. Martin-Robine, *Histoire du principe de moindre action*, Vuibert, Paris 2006.
- ⁴ J. W. Gibbs, *Elementary Principles in Statistical Mechanics*, chap. XV (New York, 1960).
- ⁵ H. Bacry, *Introduction aux concepts de la Physique Statistique*, Ellipses, Paris, 1992.
- ⁶ Landé, A.: *New Foundations of Quantum Mechanics*, p. 68. Cambridge (1965).
- ⁷ Leinaas, J. M.; Myrheim, J.: On the Theory of Identical Particles. Il Nuovo Cimento, 37 B, 1-23 (1977).
- ⁸ Greiner, W., Neise, L., Stöcker, H.: *Thermodynamics and Statistical Mechanics*. Springer (1999).
- ⁹ J.L. Basdevant et J. Dalibard, *Mécanique Quantique*, Editions de l'Ecole polytechnique, Avril 2003.
- ¹⁰ Euler, L.: Methodus Inveniendi Lineas Curvas Maximi Minive Proprietate Gaudentes. Bousquet, Lausanne et Geneva (1744). Reprint in: Leonhardi Euleri Opera Omnia: Series I vol 24 C.

- Cartheodory (ed.) Orell Fuessli, Zurich (1952).
- ¹¹ Lagrange, J.L.: *Mécanique Analytique*. Gauthier-Villars, 2nd ed., Paris (1888); translated in: *Analytic Mechanics*, Klumer Academic, Dordrecht (2001).
- ¹² Hamilton, W. R.: On a general method in dynamics, by which the study of the motions of all free systems of attracting or repelling points is reduced to the search and differentiation of one central Relation or characteristic Function. *Philos. Trans; R. Soci. PartII*, 247-308 (1834).
- ¹³ Lions, P. L.: *Generalized Solutions of Hamilton-Jacobi Equations*. Pitman (1982).
- ¹⁴ Evans, L. C.: *Partial Differential Equations*, p.123-124. Graduate Studies in Mathematics 19, American Mathematical Society (1998).
- ¹⁵ V.P. Maslov, *Analyse Idempotente*, édition Mir (1989).
- ¹⁶ M. Gondran, "Analyse MinPlus" *C. R. Acad. Sci. Paris* **323**, 371-375 (1996).
- ¹⁷ M. Gondran et M. Minoux, *Graphes, dioïdes et semi-anneaux*, Lavoisier (2004); *Graphs, Dioïds and Semi-rings: New models and Algorithms*, Springer, Operations Research/Computer Science Interfaces (2008).
- ¹⁸ M. Gondran et A. Kenoufi, "Numerical calculations of Hölder exponents for the Weierstrass functions with (min,+)-wavelets", à paraitre dans TEMA.
- ¹⁹ E. Madelung, "Quantentheorie in hydrodynamischer Form", *Zeit. Phys.* **40** (1926) 322-6.
- ²⁰ Gondran, M., Gondran, A.: Discerned and non-discerned particles in classical mechanics and convergence of quantum mechanics to classical mechanics. *Annales de la Fondation Louis de Broglie*, 36, 117-135 (2011).
- ²¹ Gondran, M., Gondran, A.: The two limits of the Schrödinger equation in the semi-classical approximation : discerned and non-discerned particles in classical mechanics. *Foundations of Probability and Physics-6*, AIP Conf. Proc. 1424,111-115 (2012).
- ²² Gondran, M., Gondran, A.: A synthetic interpretation: the double-preparation theory. *Phys. Scr. T163* (2014) 014029.
- ²³ Feynman, R., Hibbs, A.: *Quantum Mechanics and Integrals*. McGraw-Hill (1965).
- ²⁴ Cohen-Tannoudji, C., Diu, B., Laloë, F.: *Quantum Mechanics*. Wiley, New York (1977).
- ²⁵ de Broglie, L.: La mécanique ondulatoire et la structure atomique de la matière et du rayonnement. *J. de Phys.* 8, 225-241 (1927).
- ²⁶ de Broglie, L., Andrade e Silva, J.L.: *La Réinterprétation de la mécanique ondulatoire*. Gauthier-Villars (1971).

- ²⁷ Bohm, D.: A suggested interpretation of the quantum theory in terms of "hidden" variables. Phys. Rev. 85, 166-193 (1952).
- ²⁸ M.Gondran, and A. Gondran , "Numerical simulation of the double-slit interference with ultracold atoms", Am. J. Phys. **73**(5), May 2005.
- ²⁹ Dürr, D., Golstein, S., Zanghi, N.: Quantum equilibrium and the origin of absolute uncertainty. J. Stat. Phys. 67, 843-907 (1992).
- ³⁰ Jönsson, C.: Elektroneninterferenzen an mehreren künstlich hergestellten Feinspalten. Z. Phy. 161, 454-474 (1961), English translation: Electron diffraction at multiple slits. Am. J. Phys. 42, 4-11 (1974).
- ³¹ Schrödinger, E.: Der stetige bergang von der Mikro-zur Makromechanik. Naturwissenschaften 14, 664-666 (1926).
- ³² R. J. Glauber, dans *Quantum Optics and Electronics*, Les Houches Lectures 1964, C. deWitt, A. Blandin and C. Cohen-Tanoudji eds., Gordon and Breach, New York, 1965.
- ³³ Bialynicki-Birula, I., Kalinski, M., Eberly, J. H.: Lagrange Equilibrium Points in Celestial Mechanics and Nonspreading Wave Packets for Strongly Driven Rydberg Electrons. Phys. Rev. Lett. 73, 1777 (1994).
- ³⁴ Buchleitner, A., Delande, D.: Non-dispersive electronic wave packets in multiphoton processus. Phys. Rev. Lett. 75, 1487 (1995).
- ³⁵ Buchleitner, A., Delande, D., Zakrzewski, J.: Non-dispersive wave packets in periodically driven quantum systems. Physics Reports 368, 409-547 (2002).
- ³⁶ Maeda, H., Gallagher, T.F.: Non dispersing Wave Packets. Phys. Rev. Lett. 92, 133004-1 (2004).
- ³⁷ Ehrenfest, P.: Bemerkung über die angenäherte Gültigkeit der klassischen Mechanik innerhalb der Quantenmechanik. Zeitschrift für Physik 45 (7-8), 455-457 (1927).
- ³⁸ Einstein, A.: Elementary Reflexion on Interpreting the Foundations of Quantum Mechanics . in: Scientific Papers presented to Max Born. Edimbourg, Olivier and Boyd (1953).