AFSCET

Res-Systemica

Revue Française de Systémique

Fondée par Evelyne Andreewsky

Volume 17, automne 2017

Robert Vallée, pionnier français de la cybernétique

Res-Systemica, volume 17, article 09

La "distribution epsilon" comme objet scientifique

Robert Vallée

Revue Internationale de Systémique,
volume 08, numéro 2, pages 133 - 138, 1994.

6 pages

REVUE INTERNATIONALE DE SYSTÉMIQUE
Vol. 8, N° 2, 1994, pp. 133 à 138

LA « DISTRIBUTION EPSILON » COMME OBJET SCIENTIFIQUE

Robert VALLÉE [1]

Résumé

On présente un concept mathématique nouveau, la « distribution epsilon », dont le caractère évanescent peut faire douter du statut d'objet mathématique capable d'incarner un objet scientifique. La définition de la « distribution epsilon » et ses propriétés sont exposées en parallèle avec celles, bien connues, de la « distribution delta » ou distribution de Dirac. La « distribution epsilon » trouve des applications en analyse harmonique généralisée et en théorie de la diffusion.

Abstract

We introduce a new mathematical concept, the "epsilon-distribution", whose evanescent nature may generate doubts about its status as a mathematical object able to represent a scientific object. The definition of the "epsilon-distribution" and its properties are presented in parallel with those of the "delta-distribution" or Dirac distribution which are well known. The "epsilon-distribution" has applications in generalized harmonic analysis and diffusion theory.

I. OBJETS SCIENTIFIQUES ET OBJETS MATHÉMATIQUES

Le rayon lumineux est considéré, classiquement, comme un *objet scientifique* dont on peut observer les propriétés dans un assez large domaine de validité en dehors duquel il cesse d'exister. On ne peut guère le séparer de son image mathématique, en optique géométrique, ligne de plus court temps de parcours de la lumière dans un milieu réfringent non homogène. Le rayon lumineux s'identifie alors à un concept dont il est une incarnation nécessairement imparfaite. Tout objet scientifique, à l'intérieur de son domaine de validité, est ainsi associé à un concept dont il est l'image imparfaite. Le concept joue alors le rôle de l'idée platonicienne

1. 2, rue de Vouillé, 75015 Paris, France.

Rev. intern. systémique. 0980-1472 Vol. 8/94/02/ $ 4.00/© Afcet Gauthier-Villars

dont l'objet est une image. Ces concepts sont généralement d'ordre mathématique [1]. Nous pouvons dire que ce sont des *objets mathématiques* possédant une incarnation, nécessairement imparfaite, sous forme d'*objet scientifique*.

II. LA DISTRIBUTION DELTA

Ayant ainsi donné, au moins à certains objets mathématiques, un quasi-statut d'*objet scientifique*, nous allons introduire un objet mathématique de nature si évanescente que, malgré son incarnation possible dans le monde physique, sa dignité même d'objet mathématique pourrait être contestée.

Mais auparavant nous devons rappeler la définition d'un objet mathématique moins évanescent bien qu'apparemment assez peu substantiel. Il s'agit de la *distribution delta* ou distribution de Dirac. Elle trouve son origine dans l'idée de choc impulsif en mécanique, de signal impulsif en télécommunication et se trouve souvent désignée sous le nom de pseudo-fonction ou *distribution de Dirac* bien qu'il ne l'ait pas inventée. Présentée de façon intuitive c'est une « fonction » réelle $x \to \delta(x)$ définie sur $]-\infty, +\infty[$ et telle que

$$\delta(x) = \begin{vmatrix} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x \neq 0 \end{vmatrix}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, dx = 1.$$

Il s'agit là de propriétés contradictoires, en toute logique l'intégrale ne peut être que nulle. Mais cette « définition », utilisée avec doigté, conduit à des résultats intéressants et possède une grande valeur opératoire. Il faut voir en fait δ comme un concept limite radicalisant l'idée d'une fonction aux valeurs très faibles loin de 0, aux valeurs très grandes près de 0 et dont l'intégrale est égale à l'unité. On peut dire aussi, avec à ce niveau un abus de langage, que c'est la « limite » d'une famille de fonctions, dite génératrice, telles que

$$\delta(x) = \lim_{T \to 0} K_T(x) = \lim_{\sigma \to 0} L_\sigma(x) = \lim_{\lambda \to 0} E_\lambda(x)$$

avec

$$K_T(x) \neq \begin{vmatrix} 0, & x \notin [-T, T] \\ \dfrac{1}{2T}, & x \in [-T, T] \end{vmatrix},$$

$$L_\sigma(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-x^2/2\sigma^2\right), \quad E_\lambda(x) = \frac{e^{-|x|/\lambda}}{\lambda},$$

ces fonctions ayant, pour les valeurs voisines de zéro des paramètres T, σ, λ, des valeurs très faibles loin de 0, très grandes près de 0, leurs intégrales étant égales à l'unité.

Une propriété importante de la distribution delta, assez intuitive et facile à mettre en évidence à l'aide de la famille génératrice de fonctions K_T, est que pour les fonctions φ, à valeurs réelles ou complexes, continues en 0,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, \varphi(x)\, dx = \varphi(o).$$

C'est là le point de départ de la définition rigoureuse de δ dans le cadre de la théorie des distributions de Laurent Schwartz (Schwartz, 1948) où δ est considéré comme un *opérateur linéaire* agissant sur les fonctions φ, à valeurs réelles ou complexes, définies sur $]-\infty, +\infty[$, indéfiniment dérivables et à support borné [2], de telle sorte que

$$\delta < \varphi > = \varphi(0),$$

ce que l'on continue d'écrire, par abus de notation, sous la forme découverte intuitivement.

À partir de la définition de la distribution δ, ou δ_0, on introduit celle de la distribution δ_a, ou $x \rightarrow \delta(x-a)$, qui est centrée en a au lieu de l'être en 0. On établit alors, entre autres, que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u)\, \delta(u)\, du = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-u)\, f(u)\, du = f(x)$$

ou (convolution)

$$f \star \delta = \delta \star f = f.$$

On a aussi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \exp(-i\, 2\, \pi \omega\, x)\, dx = 1(\omega) = 1$$

ou (transformation de Fourier)

$$\mathcal{F}\, \delta = 1.$$

III. LA « DISTRIBUTION EPSILON »

La « distribution epsilon » que nous avons introduite récemment (Vallée, 1990, 1992, 1993) peut être présentée d'une façon tout à fait analogue à la distribution δ, dont elle apparaît un peu comme l'antithèse. On peut dire que c'est une « fonction » réelle $x \rightarrow \mathcal{E}(x)$ définie sur $]-\infty, +\infty[$ et telle que

$$\varepsilon(x) = 0, \quad \forall x \in]-\infty, +\infty[, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon(x)\, dx = 1.$$

Là encore les propriétés sont contradictoires, l'intégrale ne pouvant être que nulle. En fait $\mathcal{E}$ est aussi un concept limite radicalisant l'idée d'une fonction aux valeurs très faibles et dont l'intégrale est égale à l'unité. On peut considérer aussi que c'est la « limite » d'une famille génératrice (définie plus haut)

$$\varepsilon(x) = \lim_{T\to\infty} K_T(x) = \lim_{\sigma\to\infty} L_\sigma(x) = \lim_{\lambda\to\infty} E_\lambda(x).$$

Ces fonctions ont en effet, pour les grandes valeurs de T, σ, λ, des valeurs très faibles tout en ayant une intégrale égale à un. Mais il faut bien voir que la « fonction » $x \to \mathcal{E}(x)$ est distincte de la fonction $0(x)$ nulle sur $]-\infty, +\infty[$ et d'intégrale nulle. La distribution $\mathcal{E}$ est un « presque rien », un concept assez évanescent mais pas totalement. On peut dire que c'est une distribution oubliée en raison de son extrême « discrétion ».

En utilisant la famille génératrice des fonctions K_T il est facile de voir que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon(x)\varphi(x)\,dx = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \varphi(x)\,dx = m(\varphi),$$

$m(\varphi)$ étant la valeur moyenne de φ sur $]-\infty, +\infty[$, avec l'hypothèse que la fonction φ possède une telle valeur moyenne[3], c'est le cas des fonctions périodiques ou presque périodiques. Ce résultat permet d'introduire une définition de $\mathcal{E}$, au sens des distributions, en considérant $\mathcal{E}$ comme un *opérateur linéaire* agissant sur les fonctions φ, à valeurs réelles ou complexes définies sur $]-\infty, +\infty[$, possédant une valeur moyenne sur $]-\infty, +\infty[$ (d'autres conditions plus difficiles à préciser seraient sans doute nécessaires), de telle sorte que

$$\mathcal{E} < \varphi > = m(\varphi),$$

ce que l'on peut écrire sous la forme intégrale trouvée initialement.

De façon assez générale, on peut avancer qu'une famille de fonctions $x \to F_s(x)$, définies sur $]-\infty, +\infty[$, d'intégrale égale à un, à valeurs positives ou nulles tendant vers zéro si s tend vers l'infini, à supports tendant vers $]-\infty, +\infty[$ si s tend vers l'infini, est une famille génératrice de $\mathcal{E}$. C'est évidemment le cas de K_T, L_σ et E_λ.

On s'aperçoit facilement qu'il n'y a pas lieu, comme c'était le cas pour δ, de distinguer $\mathcal{E}_0$, centrée en 0, de $\mathcal{E}_a$, ou $x \to \mathcal{E}(x-a)$, centrée en a, car elles sont évidemment égales. On montre alors que

$$f \star \varepsilon = \varepsilon \star f = \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

si f est intégrable sur $]-\infty, +\infty[$. Par ailleurs ont établit aussi que

$$\mathcal{F}\varepsilon = d,$$

où d est la fonction $\omega \to d(\omega)$ telle que $d(\omega) = 0$ si $\omega \neq 0$ et $d(0) = 1$. La distribution $\mathcal{E}$, malgré son caractère « évanescent », possède donc des propriétés qui ne le sont pas. Mais alors que δ possède un caractère très local, $\mathcal{E}$ possède un caractère parfaitement global, c'est en cela que $\mathcal{E}$ est l'« antithèse » de δ.

IV. APPLICATIONS DE LA « DISTRIBUTION EPSILON » : ANALYSE HARMONIQUE GÉNÉRALISÉE, ÉQUATION DE DIFFUSION

Pour renforcer le statut de la « distribution $\mathcal{E}$ » en tant qu'*objet scientifique*, ou mieux objet mathématique susceptible de s'incarner, imparfaitement certes, sous forme d'objet scientifique, il est bon d'en montrer quelques applications.

Dans son analyse harmonique généralisée, Norbert Wiener considère des fonctions f (Wiener, 1930, 1979), à valeurs réelles ou complexes, telles que

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |\, f(t) \,|^2 \, dt$$

soit définie (elle est alors invariante si l'on change $-T$ en $-T+a$ et T en $T+a$). C'est le cas des fonctions aléatoires stationnaires (bruits). En d'autres termes il considère des fonctions f telles que

$$\varepsilon\,(\,|\,f\,|^2\,) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon\,(t)\,|\,f\,(t)\,|^2\,dt = m\,(\,|\,f\,|^2)$$

soit défini. Et, chemin faisant, Wiener est amené à démontrer que

$$\lim_{\alpha\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha}{\pi}\,(\sin^2(t/\alpha)/t^2)\,|\,f\,(t)\,|^2\,dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |\,f\,(t)\,|^2\,dt = m\,(\,|\,f\,|^2).$$

Mais si l'on remarque[4] que

$$\lim_{\alpha\to\infty} \frac{\alpha}{\pi}\,\sin^2(t/\alpha)/t^2 = \varepsilon\,(t),$$

le résultat est immédiat.

Une autre intervention « naturelle » de la « distribution $\mathcal{E}$ » se produit dans l'étude de l'équation de diffusion ou équation de la chaleur. Dans le cas unidimensionnel cette équation s'écrit

$$\partial\, u\,(x,\,t)\,/\,\partial\, t - \partial^{\,2}\, u\,(x,\,t)\,/\,\partial\, x^2 = 0$$

avec $u\,(x,\,0) = f(x)$.

La solution est alors donnée par la convolution

$$u(x,\, t) = L_{\sqrt{2t}}(x) \star f(x).$$

Naturellement

$$u(0, t) = \delta(x) \star f(x) = f(x)$$

et

$$\lim_{t \to \infty} u(x,\, t) = u(x,\, \infty) = \varepsilon(x) \star f(x) = \varepsilon(x) \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, d\xi.$$

Ainsi la répartition des valeurs de u, pour $t = \infty$, est donnée par le produit de la « distribution epsilon » par l'intégrale de f, supposée finie (Vallée, 1992).

Notes et références

1. Ils peuvent être aussi d'ordre logique : n'a-t-on pas considéré la logique classique comme une physique de l'objet quelconque.
2. Ces conditions sont nécessaires pour définir, dans le même esprit, des distributions plus générales que δ et aussi pour donner un sens à la « convergence au sens des distributions ».
3. Il faut considérer .

$$\lim_{T_1 \text{ et } T_2 \to \infty} \frac{1}{T_1 + T_2} \int_{-T_1}^{T_2} \varphi(x)\, dx,$$

T_1 et T_2 tendant vers l'infini indépendamment l'un de l'autre.

4. La famille des fonctions $(\alpha/\pi)\, \sin^2\, (t/\alpha)/t^2$ satisfait les conditions proposées plus haut pour une famille génératrice.

L. SCHWARTZ, Généralisation de la notion de fonction et de dérivation ; théorie des distributions, *Annales des Télécommunications*, 1948, Vol. 3, p. 135-140.

R. VALLÉE, Information entropy and systems, 8th International Congress of Cybernetics and Systems of the WOSC, New York, 1990, in *Proceedings of the 8th International Congress of Cybernetics and Systems of the WOSC*, Manikopoulos C. N. (ed.), Vol. 1, p. 328-331, NJIT Press, Newark, 1991.

R. VALLÉE, The "epsilon-distribution" or the anti-thesis of Dirac's delta, in *Cybernetics and Systems Research' 92*, Trappl. R. (ed.), Vol. 1, p. 97-102, World Scientific, Singapour, 1992.

R. VALLÉE, The "epsilon-distribution" and its applications to diffusion equation and Wiener's generalized harmonic analysis, in *Recent Advances in Cybernetics and Systems*, Ghosal A., Murthy P. N. (eds.), pp. 64-69, Tata McGrawHill Publishing Company Limited, La Nouvelle Delhi, 1993.

N. WIENER, Generalized harmonic analysis, *Acta Mathematica*, 1930, Vol. 55, p. 117-258.

N. WIENER, *Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series*, John Wiley and Sons, New York, 1949.