AFSCET

Res-Systemica

Revue Française de Systémique

Fondée par Evelyne Andreewsky

Volume 17, automne 2017

Robert Vallée, pionnier français de la cybernétique

Res-Systemica, volume 17, article 12

Temps propre d'un système dynamique, cas d'un système explosif-implosif

Robert Vallée

Actes du 3e Congrès Européen de Systémique
Rome, p. 967-970, octobre 1996.

4 pages

TEMPS PROPRE D'UN SYSTEME DYNAMIQUE, CAS D'UN SYSTEME EXPLOSIF-IMPLOSIF

Robert Vallée
WOSC 2 rue de Vouillé 75015 Paris,France

RESUME :On propose un formalisme mathématique permettant de distinguer durée de référence et durée propre relative à un système dynamique. A cette durée propre est associée un temps propre du système. On étudie le cas d'un système explosif-implosif où les instants, initial et final, sont rejetés à - ∞ et + ∞ lorsqu'ils sont représentés en temps propre. On termine par le cas d'un système purement explosif. Il est fait référence à la cosmologie et à la physiologie.

ABSTRACT: A mathematical formalism is proposed in order to distinguish reference duration and proper duration concerning a dynamical system. To the proper duration is associated a proper time adapted to the system. The case of an explosive-implosive system is considered where initial and final instants are rejected to - ∞ and + ∞ when they are represented with proper time. Finally the case of a purely explosive system is presented. References are made to cosmology and physiology.

1. DUREE DE REFERENCE ET DUREE SUBJECTIVE PERCUE

Nous partons d'une modélisation mathématique, de nature systémique, de la perception-mémorisation que nous avons déjà présentée ailleurs (Vallée, 1977, 1991, 1995). Nous nous bornons ici au cas unidimensionnel où la perception provient d'un seul canal sensoriel. Nous considérons un système S dont la perception qu'il a de son environnement est représentée à l'instant t, par le scalaire v(t). Nous supposons S doué d'une certaine forme de mémoire, de telle sorte qu'il y a à la fois perception et mémorisation et que ce qui est perçu-mémorisé est décrit, à l'instant t, par le scalaire s(t) dont l'évolution est régie par une équation différentielle du type

$$ds(t)/dt = -a(t)\, s(t) + v(t).$$

On sait qu'il en résulte que

$$s(t) = h(t,t_o)\, s(t_o) + \int_{t_o}^{t} h(t,r)\, v(r)\, dr$$

où

$$h(t,r) = \exp\left(- \int_{t_o}^{t} a(w)\, dw\right),$$

t_o étant un instant *"initial"* quelconque. On a ici un processus de mémorisation des perceptions v(r) si l'on interprète h(t,r) v(r) comme ce qui subsiste, à l'instant t, de la perception v(r) relative à l'instant antérieur r, cette interprétation étant cohérente du fait de la propriété de *"transitivité"*

$$h(t',t)\, h(t,r) = h(t',r).$$

Faisant l'hypothèse que S part, à l'instant t_o, d'un état nul de perception-mémorisation,

soit $s(t_o) = 0$, nous avons $s(t) = \int_{t_o}^{t} h(t,r)\, v(r)\, dr$.

Le scalaire h(t,r) est ainsi un facteur de mémorisation, ou un coefficient de mémoire dans la terminologie utilisée en économie (Allais, 1972). La perception v(t), à l'instant t, résulte, quand à elle, de l'application au signal u, provenant de l'environnement, d'un opérateur d'observation (Vallée, 1951) que nous supposons réduit ici à une simple multiplication par un scalaire b(t), soit

$v(t) = b(t)\, u(t)$.

Pour tenir compte du fait que le résultat de la mémorisation élémentaire $h(t,r)\, v(r)$ doit décroître, au sens large, lorsque r diminue, nous sommes amené à faire l'hypothèse $a(t) \geq 0$. Cette hypothèse ne suffit pas pour assurer que le résultat de la mémorisation élémentaire tend vers zéro lorsque r tend vers $-\infty$, dans le cas d'une mémorisation imparfaite où a(t) n'est pas identique à 0. Cette condition doit être ajoutée.

Nous adaptons ce modèle au cas de la perception-mémorisation de la durée en écrivant, après remplacement de s(t) par $\theta(t)$,

$$\theta(t) = \int_{t_0}^{t} h(t,r)\, v(r)\, dr = \int_{t_0}^{t} \exp\left(-\int_r^t a(s)\, ds\right) v(r)\, dr,$$

où $\theta(t) = \theta(t) - \theta(t_0)$, puisque $\theta(t_0) = 0$ par hypothèse, représente la durée perçue-mémorisée depuis t_0, tandis que $t-t_0$ est la durée de référence écoulée depuis t_0. Nous considérons de plus que $b(t)\, u(t) = v(t)$ représente l'importance que le système attribue à l'instant t lui-même, de sorte que b(t) apparaît comme un facteur d'attention portée par S à u(t) qui est interprété comme le poids de l'instant t. Les scalaires v(t), b(t) et u(t) sont alors positifs ou nuls. Mais, le temps t étant un temps de référence, tous les instants t ont un poids égal, et on peut considérer que $u(t) \equiv 1$. L'importance v(t) que S attribue à l'instant t est alors égale au facteur d'attention exercée à cet instant $v(t) = b(t)$.

Cette présentation générale était nécessaire pour justifier le passage au cas particulier de la mémorisation parfaite où $h(t,r) \equiv 1$, ce qui équivaut à $a(t) \equiv 0$. Nous avons alors

$$\theta(t) = \int_{t_0}^{t} b(r)\, dr,$$

c'est la durée perçue-mémorisée attribuée subjectivement par le système S à l'intervalle (t_0,t). Elle est égale à $t - t_0$ si $b(t) \equiv 1$.

2. DUREE ET TEMPS PROPRES ATTACHES A UN SYSTEME DYNAMIQUE

Le facteur d'attention b(t) que S applique à l'instant t peut ne pas être dû à son degré d'éveil mais lui être imposé par l'intensité événementielle $b^*(t)$ de cet instant au sein même de S. A côté de la durée subjective $\theta(t)$, liée à b(t), peut exister une durée $\theta^*(t)$ propre au système et liée à $b^*(t)$ (Vallée 1991, 1995). Ce sont cette durée propre et le temps propre associés qui vont maintenant nous intéresser [(1)].

Nous partons du principe que l'intensité événementielle $b^*(t)$ de l'instant t est d'autant plus grande que le système est le siège, à l'instant t, de variations plus importantes de son état x(t). L'idée sous-jacente est évidemment que l'écoulement du temps propre est d'autant plus rapide qu'il se produit, au sein du système, des changements plus grands. On peut songer à prendre b^* égal une

[(1)] Ce temps propre est distinct du temps propre de la relativité. Il se différencie aussi du temps intrinsèque que nous avons introduit dans un contexte informationnel (Vallée, 1994).

fonction croissante d'une norme du vecteur $dx(t)/dt$, par exemple le carré de cette norme. Nous avons alors

$$b^*(t) = \| dx(t)/dt \|^2,\ \theta^*(t) = \int_{t_o}^{t} \| dx(r)/dr \|^2 dr.$$

Si $x(t)$ demeure constant, le temps intrinsèque ne s'écoule pas car *"il ne se passe rien"*, nous avons $\theta^*(t) \equiv 0$. Si la norme de $dx(t)/dt$ demeure constante et égale à $(k)^{1/2}$, alors le temps propre s'écoule proportionnellement au temps de référence t et $\theta^*(t) = k\,(t-t_o)$.

3. CAS D'UN SYSTEME EXPLOSIF-IMPLOSIF

Dans un but de simplification nous nous plaçons dans le cas d'un système S monodimensionnel. Nous avons alors

$$b^*(t) = (dx(t)/dt)^2.$$

Considérons le cas d'un système explosif-implosif où $x(t)$ commence par croître très brusquement puis, après passage par un maximum, finit par décroître de plus en plus rapidement. Nous voulons seulement aboutir à des conclusions dont uniquement l'aspect qualitatif serait à retenir pour $\theta^*(t)$.
Pour cela nous prenons pour $x(t)$ une expression simple

$$x(t) = b/a\ \ (a^2-(t-a)^2)^{1/2},\ t_o=0\leq t\leq 2a,$$

ce qui correspond pour la courbe, décrite par $x(t)$, à un arc d'ellipse dont la longueur du grand axe est 2a et celle du demi petit axe b. Il vient immédiatement

$$\begin{aligned} b^*(t)&=(dx(t)/dt)^2=(b^2/a^2)((t-a)^2/a^2-(t-a)^2) \\ &=(b^2/2a)(1/t + 1/2a-t -2/a) \end{aligned}$$

et par suite, après avoir posé

$$H^*(t) = (b^2/2a)\ (\mathrm{Log}t - \mathrm{Log}(2a-t) -2t/a),$$

il vient pour la durée propre de l'intervalle (t_o,t)

$$\theta^*(t) = H^*(t) - H^*(t_o),$$

$H^*(t)$ étant ce que nous proposons d'appeler le temps propre associé au système.

La fonction $H^*(t)$ se comporte comme Logt pour $t > 0$ et voisin de 0, comme - Log(2a-t) pour $t > 2a$ et voisin de 2a, elle prend la valeur b^2/a pour $t = a$ avec une dérivée nulle. Nous avons là un paramétrage du temps de référence t qui envoie l'instant $t = 0$ du début de l'explosion à $-\infty$ et l'instant $t = 2a$ de la fin de l'implosion à $+\infty$. Si l'on examine l'intensité événementielle b (t) on voit qu'elle se comporte comme 1/t au début de l'explosion et comme 1/2a-t à la fin de l'implo-sion [1], elle tend donc vers l'infini au début et à la fin de la vie du système. Finalement cette évolution explosive-implosive, qui en temps de référence a pour durée 2a, possède une durée propre infinie. Un tel temps propre a vocation à s'appliquer à des systèmes à comportement explosif-implosif : croissante cellulaire suivie d'une phase involutive, modèle cosmologique, avec expansion suivie d'effondrement, impliquant alors un temps cosmologique généralisé donné par $H^*(t)$.

4. CAS EXPLOSIF

Le cas purement explosif s'obtient en faisant tendre à la fois a et b vers l'infini, b^2/a tendant vers p. On voit que, dans ces conditions,

$$x(t) = (b/a)\ (a^2-(t-a)^2)^{½} = (2b^2t/a - b^2t^2/a^2)^{½} \rightarrow 2pt.$$

L'évolution de l'état du système S est alors décrite par un arc de parabole de paramètre p, limite de l'arc d'ellipse du cas précédent. Le phénomène est uniquement explosif. L'intensité événementielle s'écrit

$$b^*(t) = p/2t,$$

elle devient infinie lorsque t tend vers zéro (début de l'explosion) et tend vers zéro lorsque t tend vers l'infini (fin de l'explosion). Le temps propre et la durée propre de l'intervalle (t_o,t) prennent la forme

$$H^*(t) = p\ \mathrm{Log}t/2,\ \theta^*(t) = p\ (\mathrm{Log}t - \mathrm{Log}t_o)/2.$$

La durée propre du début de l'explosion est infinie. Le paramétrage $H^*(t)$ du temps de référence envoie l'instant $t = 0$ à $-\infty$. Nous retrouvons le temps cosmologique classique, forme dégénérée du temps cosmologique généralisé proposé plus haut. Ce temps logarithmique a aussi été envisagé comme temps physiologique en se fondant sur la vitesse de cicatrisation des plaies (Lecomte du Noüy, 1936).

REFERENCES

- Allais M., 1972, Forgetfulness and interest, Journal of Money, Credit and Banking, pp.40-71.
- Lecomte du Noüy P., 1936, Le temps et la Vie, Gallimard, Paris.
- Vallée R., 1951, Sur deux classes d'*"opérateurs d'observation"*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, vol.233, pp.1350-1351.
- Vallée R., 1977, Sur la modélisation en théorie des systèmes des processus de perception et d'actualisation des chroniques, in Modélisation et Maîtrise des Systèmes, Editions Hommes et Techniques, Suresnes, pp.178-182.
- Vallée R., 1991, Perception, memorization and multidimensional time, Kybernetes, vol.20, n.6, pp.14-27.
- Vallée R., 1994, About Intrinsic time of a dynamical system, in Trappl (ed.), Cybernetics and Systems' 94, vol.1, World Scientific, Singapour, pp:33-38.
- Vallée R., 1995, Cognition et Système, Essai d'Epistémopraxéologie, l'Interdisciplinaire, Lyon-Limonest.

---

[2] Par une autre démarche on peut être amené (Vallée, 1991, 1995) à ne pas introduire dans l'expression de $b^*(t)$ de terme constant assurant une valeur nulle à $b^*(t)$ pour t=a. La fonction H^* est alors une fonction logistique-réciproque.