AFSCET

Res-Systemica

Revue Française de Systémique

Fondée par Evelyne Andreewsky

Volume 19, automne 2019

Systémique du signe et du sens

Res-Systemica, volume 19, article 07

De droite à gauche et de haut en bas

François Dubois

11 pages

contribution reçue le 06 janvier 2020

De droite à gauche et de haut en bas

François Dubois

Association Française de Science des Systèmes Cybernétiques, Cognitifs Et Techniques, AFSCET-ENSAM, 151, bd de l'Hôpital, Paris 13ème, France.
fhdubois@gmx.fr

06 janvier 2020 *

Résumé.
Nous présentons quelques aspects classiques et moins classiques de l'utilisation de symboles mathématiques. Les numérations romaine et arabe, leur confrontation en occident, l'introduction du zéro puis de nombreux autres symboles. Nous abordons ensuite les séries divergentes et plusieurs tentatives pour leur donner un sens. Enfin, une remarque personnelle sur la façon de noter les matrices.

Right to Left and Top-Down

Abstract
We present classical and not so classical aspects for using symbols in Mathematics. Roman and Arabic numerals, their confrontation in Occident, the introduction of zero and many other symbols. We propose a section on divergent series and several trials to give a mathematical sense. We finish with a personal remark on the actual notation for matrices.

Compter et calculer

Les Romains comptent en base dix avec peu de symboles

Nous avons deux mains de cinq doigts chacune, soit dix doigts. Pour compter, on part du nombre I : I, II, III, IIII. À ce stade, on commence à avoir du mal à distinguer le trois du quatre. Le nombre "cinq", nombre de doigts d'une main, joue un rôle intermédiaire dans la numération des Romains et a droit à un symbole spécifique : V. Les nombres de I à V sont ceux de la première main. De six à dix, on compte les doigts de la première main plus des

* Cet article est repris d'une communication avec le même titre, présentée aux "Journées Afscet au Moulin d'Andé" le dimanche 16 juin 2019.

doigts de la seconde main. La suite du comptage naturel se présente donc sous la forme VI, VII, VIII, VIIII. Puis un nouveau symbole pour représenter “dix” : X.
La Romains ont une astuce arithmétique pour diminuer le nombre de symboles : quatre est égal à “cinq moins un” et on le note “un avant cinq”, soit IV. Neuf est égal à “dix moins un” : on le note “un avant dix”, soit IX. D'où la suite romaine des nombres de un à dix : I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X. Elle utilise en tout trois symboles : I, V, X.
Compter en base dix revient ensuite à faire des paquets de dix et compter les paquets de dix. Deux paquets de dix (vingt) : XX, trois paquets de dix (trente) : XXX. Pour cinq paquets de dix (cinquante), on introduit un nouveau symbole : L. Quatre paquets de dix (quarante) reviennent à retrancher dix de cinquante. Les Romains suivent la même idée que pour le nombre “quatre” et quarante est représenté avec deux symboles seulement : XL. Ensuite, six paquets de dix (soixante), sept paquets de dix (septante) et huit paquets de dix (octante) suivent le principe de construction initial d'une addition des dizaines suppémentaires à droite : LX, LXX, LXXX. Le nombre “cent” demande un nouveau symbole : C. Alors neuf paquets de dix (nonente) sont égaux à cent moins un paquet de dix : XC.
On reprend avec l'échelle des centaines le principe de calcul qui fonctionne avec les unités et les dizaines : deux et trois paquets de cent : CC et CCC. Pour cinq cents, un nouveau symbole : D. D'où quatre cents, six cents, sept cents et huit cents : CD, DC, DCC, DCCC. Le nombre mille est représenté par la lettre M. Donc neuf paquets de cent s'écrivent CM.
Observons que l'écriture des nombres par les Romains n'utilise que sept symboles : un (I), cinq (V), dix (X), cinquante (L), cent (C), cinq cents (D) et mille (M). Au delà, les Romains n'ont pas jugé utile d'inventer de nouveaux symboles pour manipuler des nombres plus grands. Ainsi, l'année deux mille dix neuf s'écrit MMXIX et on ne peut pas représenter des nombres au-delà de quatre mille neuf cent quatre vingt dix neuf : MMMMDCCCCXCIX.

Les Arabes comptent en base dix de droite à gauche
Gerbert d'Aurillac (945–1003), qui deviendra Sylvestre II, pape de l'an mille, rapporte les chiffres arabes d'Espagne. L'investissement symbolique de cette façon de compter est important puisque les neuf premiers nombres (quasiment les doigts des deux mains !) demandent chacun un symbole : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Puis on a dix, qui forme un “paquet de dix”. On ajoute ensuite un nombre de un à neuf à cette première dizaine : 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19.

Figure 1. Journée mondiale de la liberté de la presse le trois mai 2019 écrit en langue arabe.

Chacun sait que la langue arabe se lit de droite à gauche. On lit donc les nombres de droite à gauche, comme on lit la langue arabe. La figure 1 mélange la langue arabe et les nombres modernes. Un nombre se présente comme une suite de chiffres. Le chiffre de droite désigne le nombre d'unités. Puis à sa gauche, le nombre de dizaines, à sa gauche, le nombre de centaines, à sa gauche, le nombre de milliers, *etc.* Quatorze par exemple s'écrit quatre unités plus une dizaine et se note 14 ; deux unités plus une dizaine plus trois centaines plus deux milliers se note 2 312 et s'écrit en français deux mille trois cent douze. On note bien ici une véritable tension entre une représentation des nombres de droite à gauche et la langue française qui se lit, comme beaucoup d'autres, de gauche à droite !

Abacistes et algoristes, une querelle de cinq siècles !
Calculer avec les chiffres romains est difficile alors que nous avons appris à l'école à effectuer les quatre opérations avec les chiffres arabes. Mais pourquoi compter si on a une table, un abaque, ou une machine qui donne le résultat d'un calcul ? Ainsi, l'arrivée des chiffres arabes n'a pas détrôné les chiffres romains. Les nombres sont représentés en France avec des chiffres romains pendant tout le moyen-âge pour les usages courants... Grande querelle de cinq siècles jusqu'à la fin du XVIII$^{\text{ième}}$ siècle entre les partisans des chiffres romains traditionnels et des calculs avec des abaques et les partisans des chiffres arabes et des calculs avec un "algorithme". Le *Liber Abaci* [19] du mathématicien italien Léonard de Pise (Fibonacci, 1175–1250) est le premier ouvrage où les chiffres arabes apparaissent dans un livre écrit. De nos jours, les chiffres romains sont en principe abandonnés. Mais on les retrouve par exemple pour décrire le temps comme les siècles, les années ou les heures.
Avec les abaques, les chiffres sont rangés de droite à gauche et peuvent être représentés par des jetons. Le nombre de jetons représente un chiffre de un à neuf. Mais comment faire quand l'une des colonnes d'un abaque n'a pas de jeton ? La notion de "jeton pointé" exprime qu'il n'y a pas de jeton dans la colonne correspondante, qu'elle est vide.

Zéro

Les chiffres arabes ont été empruntés aux Indiens. Il en est fait mention en Syrie dès le VII$^{\text{ième}}$ siècle (voir par exemple le livre de Georges Ifrah [12]). Mais surtout, le besoin d'un symbole s'impose pour exprimer qu'il n'y a pas de chiffre dans une colonne donnée. Pour éviter une "place vide" dans l'écriture d'un nombre on place un simple point ou un jeton pointé. Brahmagupta (598–668), astronome réputé à Ujjain, se pose la question de savoir quelle est la valeur obtenue si on retranche un nombre à lui-même. Il invente le symbole "0" pour le nombre zéro, résultat de l'opération précédente. Zéro est défini comme la somme de deux quantités opposées : un bien et une dette. Zéro permet *in fine* de désigner l'absence, le vide, ce qui constitue un progrès conceptuel considérable. Les règles de calcul avez zéro sont fondamentales. En langage mathématique contemporain, elles s'expriment sous la forme : $0 + n = n + 0 = n$ et $0 \times n = n \times 0 = 0$ pour tout entier n. En conséquence; on ne peut pas diviser par zéro ! Notons que les Chinois avaient introduit également une représentation des nombres avec dix symboles mais l'emploi du zéro avec le mathématicien chinois Qin Jiushao (1202–1261) est postérieure à Brahmagupta. Pour en savoir plus sur ces questions historiques, nous renvoyons par exemple au livre de Otto Neugebauer, *Les Sciences exactes dans l'Antiquité* [16] ; pour une histoire complète de zéro, le livre de Charles Seife [25] constitue une excellente introduction.

Toujours plus de symboles !

La notation moderne employée au paragraphe précédent est le fruit d'un très long processus d'addition successive de nouveaux symboles. Nous en proposons quelques uns dans ce paragraphe.

Barre de fraction

La barre de fraction, pour désigner par exemple le nombre "quatre tiers" avec la notation $\frac{4}{3}$, est proposée par Abu Kamil (850–930). Abu-Kamil Shoja ben-Aslam était un mathématicien et ingénieur égyptien. Ses travaux se réfèrent à Muhammad Ibn Musa al-Khwarizmi (780–850), fondateur de l'algèbre. Les œuvres d'Abu Kamil ont été traduites en Français par Roshdi Rashed [1]. Plusieurs siècles plus tard, Fibonacci (1175–1250), retrouve la notation de la barre de fraction lorsqu'il montre dans le *Liber Abaci* [19] que tout nombre rationnel compris entre zéro et un peut s'écrire comme somme de fractions égyptiennes, de numérateur égal à l'unité.

Plus et moins

Le mathématicien allemand Johannes Widmann (1462–1498) vivait à Laibzig. Dans son livre *Behende un hübsche Rechnung auff allen Kauffmanschafften* [29], il introduit les signes + et − (voir la figure 2).

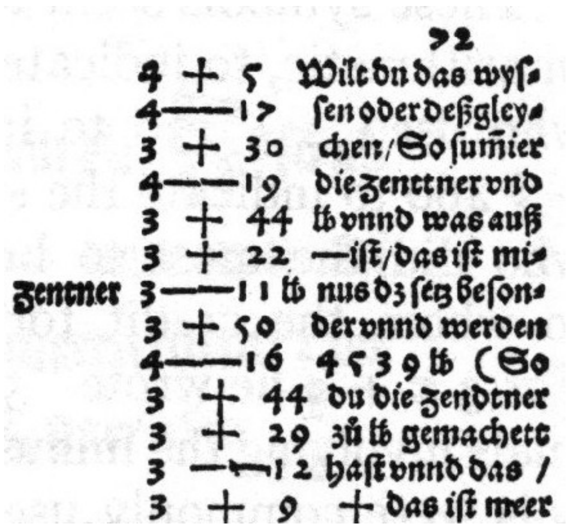

72
4 + 5 Wilt du das wyſ-
4 — 17 ſen oder deßgley-
3 + 30 chen / So ſumier
4 — 19 die zentner vnd
3 + 44 lb vnnd was auß
3 + 22 — iſt / das iſt mi-
zentner 3 — 11 lb nus dz ſetz beſon-
3 + 50 der vnnd werden
4 — 16 4539 lb (So
3 + 44 du die zendtner
3 + 29 zů lb gemachett
3 — 12 haſt vnnd das /
3 + 9 + das iſt meer

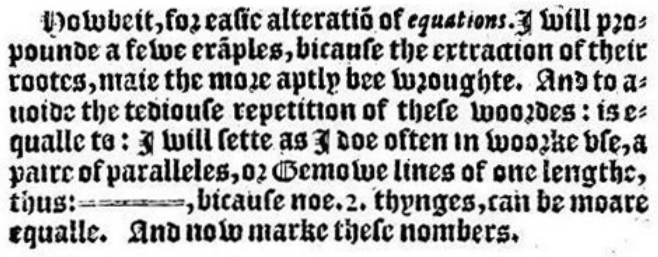
Figure 2. Un extrait du livre de Johannes Widmann *Behende un hübsche Rechnung auff allen Kauffmanschafften* [29].

Racine carrée

Le symbole $\sqrt{\ }$ pour la racine carrée est introduit par Christoff Rudolff (1499–1545), mathématicien qui a travaillé à Vienne, dans son ouvrage *Behend und hübsch Rechnung durch die kunstreichen regeln Algebre so gemeincklich die Coss genent werden* [23].

Égalité

Robert Recorde (1512–1558), physicien et mathématicien gallois, a proposé dans le livre *The Whetstone of Witte, which is the second part of Arithmetike, containing the Extraction of Rootes, the Cossike Practice, with the Rules of Equation, and the Woorkes of Surde Numbers*, [22] le symbole d'égalité $=$.



Howbeit, for easie alteratiō of *equations*. I will pro-
pounde a fewe exāples, bicause the extraction of their
rootes, maie the more aptly bee wroughte. And to a-
uoide the tediouse repetition of these woordes : is e-
qualle to : I will sette as I doe often in woorke vse, a
paire of paralleles, or Gemowe lines of one lengthe,
thus: ═══, bicause noe. 2. thynges, can be moare
equalle. And now marke these nombers.

Figure 3. Explication du symbole d'égalité telle que décrite par Robert Recorde dans son livre [22] en 1557.

Remplacer les nombres par des lettres

Qui n'a pas exprimé ou entendu exprimer une phrase comme celle-ci : "avec l'algèbre, je n'ai plus rien compris aux mathématiques" ? Les nombres sont en effet souvent remplacés par des lettres. Cette puissance symbolique permet de manipuler un nombre quelconque sans avoir à le nommer explicitement. Cette conceptualisation a débuté avec l'œuvre du mathématicien français François Viète (1540–1603) dans son *Opera Mathematica* [27].

Notation exponentielle pour les puissances

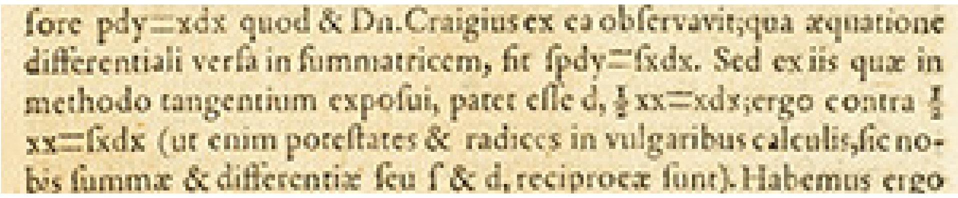
La notation exponentielle est introduite par René Descartes (1596–1650), philosophe et mathématicien français. Il introduit cette notation dans le cas particulier du carré, c'est à dire pour l'exemple du degré deux ($b^2 = b\,b$) dans son traité *La géométrie* [5]. On pourra lire avec profit l'article de Michel Serfati [26] à ce sujet.

Symbole de l'infini

John Wallis (1616–1703), mathématicien anglais, précurseur du calcul différentiel et intégral, introduit le symbole du "huit renversé" (∞) pour désigner l'infini dans son livre sur les sections côniques [28].

Dérivée et intégrale

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), philosophe, mathématicien et juriste allemand, introduit la notaion $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ pour la dérivée de la fonction y de la variable x dans son article "Nova Methodus pro maximis et minimis" [14] publié dans le journal *Acta Eruditorum* en octobre 1684. Cet article est considéré comme fondateur du calcul infinitésimal. On y trouve en particulier la célèbre "formule de Leibniz" qui donne la différentielle d'un produit : $\mathrm{d}(u\,v) = (\mathrm{d}u)\,v + u\,(\mathrm{d}v)$. Le symbole d'intégration est publié deux ans plus tard dans l'article "De Geometria Recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum" [15]. L'opération de sommation, d'intégration peut être considéré comme l'inverse de la dérivation : $y(x) = \int \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x$. Le symbole $\int$ est en fait un "s" allongé pour exprimer une somme qui contient une infinité continue de termes.



ſore pdy=xdx quod & Dn. Craigius ex ea obſervavit; qua æquatione differentiali verſa in ſummatricem, fit ſpdy=ſxdx. Sed ex iis quæ in methodo tangentium expoſui, patet eſſe d, ½ xx=xdx; ergo contra ½ xx=ſxdx (ut enim poteſtates & radices in vulgaribus calculis, ſic nobis ſummæ & differentiæ ſeu ſ & d, reciprocæ ſunt). Habemus ergo

Figure 4. Un extrait de la page 297 du journal *Acta Eruditorum* de juin 1686 où Leibniz introduit le symbole d'intégration, noté $\int$ de nos jours.

Le calcul différentiel émerge aussi en Angleterre avec Isaac Newton (1642–1727), physicien, mathématicien, philosophe et astronome. Afin de décrire la mécanique au sein d'un champ de gravitation, Newton invente les équations différentielles dans ses *Philosophiae naturalis principia mathematica* [17], et en particulier la dérivation, qu'il appelle "fluxion". Les notations de Newton sont encore employées et on a par exemple $\dot{y} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$. On considère en général que les notations des *Principia* s'avèrent moins puissantes que celles de Leibniz avec la différentielle. À propos de la querelle entre ces deux géants de la pensée afin de savoir qui a inventé le calcul infinitésimal, nous renvoyons à notre contribution sur la double découverte et la sérendipité [6] : beaucoup de découvertes importantes sont apparues au moins deux fois, en même temps et de façon indépendante !

Sommation

La sommation discrète est introduite par le mathématicien suisse Leonhard Euler (1707–1783) en 1755 dans ses *Institutiones calculi differentialis* [9]. D'ailleurs le célèbre nombre d'Euler "e" approximativement égal à 2,718 est défini comme la somme des inverses des factorielles : $\mathrm{e} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

Imaginaire

Le mathématicien français Augustin Louis Cauchy (1789–1857) propose de remplacer la "racine de -1" introduite indépendamment par les mathématiciens italiens Scipione del Ferro (1465–1526) et Niccoló Fontana dit Tartaglia (1499–1557) plusieurs siècles plus tôt pour résoudre les équations du troisième degré. En notation moderne, on écrit parfois $i = \sqrt{-1}$. Cauchy fonde aussi l'analyse complexe dans son article "Sur les intégrales définies" [4], puis le calcul des résidus.

Intersection et réunion

La théorie des ensembles développée par le mathématicien allemand Georg Cantor (1845–1918) a demandé d'étendre le langage mathématique. Ainsi, Hermann Grassmann (1809–1877), mathématicien et indianiste allemand, introduit dans *Die lineale Ausdehnungslehre* [11] les symboles d'intersection $\cap$ et de réunion $\cup$. Pour deux ensembles donnés A et B, $A \cap B$ désigne l'ensemble formé des éléments qui appartiennent à la fois à A et à B et $A \cup B$ celui dont les éléments appartiennent à l'ensemble A ou à l'ensemble B ou éventuellement aux deux à la fois.

Sous-ensemble

La théorie des ensembles introduit aussi la notion d'inclusion. L'ensemble A est inclus dans l'ensemble B si tous les éléments de A sont également éléments de l'ensemble B. Depuis le mathématicien allemand Ernst Schröder (1841–1902) dans le volume 1 des *Vorlesungen über die Algebra der Logik* [24], on note cette propriété sous la forme $A \subset B$.

Appartient, "il existe"
Giuseppe Peano (1858–1932) mathématicien et linguiste italien, introduit dans son *Formulaire de mathématiques*, [18] la notation $x \in A$ pour exprimer que l'élément x appartient à l'ensemble A. Il propose aussi le quantificateur existentiel $\exists$ pour exprimer "il existe".

"Pour tout"
Le renouveau de la logique avec le Britannique George Boole (1815–1864), les Allemands Gottlob Frege (1848–1925) et Kurt Gödel (1906–1978) ou les Américains Charles Sanders Peirce (1839–1914) et Emil Post (1897–1954) demandent de nouvelles expressions et en particulier des quantificateurs pour développer le calcul des prédicats. Ainsi, le mathématicien allemand Gerhard Gentzen (1909–1945) propose dans son article "Untersuchungen über das logische Schliessen" [10] de 1935 le quantificateur universel $\forall$ qui signifie "pour tout".

Pour en savoir davantage sur les notations mathématiques, l'ouvrage de référence est le livre de Florian Cajori (1859–1930) *A History of Mathematical Notations* [3], auquel nous avons beaucoup emprunté ! On pourra aussi consulter l'article d'introduction proposé par Pierre Legrand [13].

Donner du sens à tout prix ?

Divertissement pédagogique
L'intégrale double $I = \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right] \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ constitue un exemple de notation symbolique qui s'avère ne pas avoir de sens mathématique. En effet, le théorème de Fubini propose de calculer cette "intégrale" en intégrant d'abord par rapport à la première variable, puis par rapport à la seconde, ou bien dans l'autre sens, d'abord par rapport à la seconde variable, puis par rapport à la première. On trouve alors successivement $I = \frac{\pi}{4}$ puis $I = -\frac{\pi}{4}$, ce qui semble mettre en défaut ce théorème ! Mais il ne faut surtout pas négliger de vérifier l'hypothèse fondamentale du théorème de Fubini : l'intégrale de la valeur absolue de la fonction à intégrer doit être finie. Or dans notre exemple, $\int_0^1 \int_0^1 \mid \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \mid \, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = +\infty$ ce qui interdit *ipso facto* d'utiliser les conclusions du théorème de Fubini. La moralité est que la notation $\int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right] \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ est une jolie suite de symboles qui ne représente pas un nombre ! Pour ceux qui veulent en savoir un peu plus, pourquoi ne pas consulter [7] ?

Série divergente
Si on essaie de donner un sens à la somme d'une série, c'est à dire à la limite d'une somme $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ si l'entier n tend vers l'infini, à l'expression $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$, on peut démontrer que le "terme général" u_n doit nécessairement tendre vers zéro. Tous les étudiants savent que le terme général d'une série convergente tend vers zéro. Par exemple, la fonction exponentielle $\exp(x)$ est définie par la série $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, x^n$. On a ainsi $\exp(1) = \mathrm{e} \simeq 2,718$. Remarquons que le terme général de cette série est croissant pour $0 \leq n \leq \log(x)$ puis décroissant pour $n \geq \log(x)$. Si une série ne converge pas, on dit

qu'elle est "divergente". Avec la théorie classique, toute série dont le terme général ne tend pas vers zéro est divergente et donc ne représente pas un nombre.
Pourtant, ce type de notion de convergence ne satisfaisait pas complètement le mathématicien français Henri Poincaré (1854–1912). Dans ses *Méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste* [20], il nous avoue : "Il y a entre les géomètres et les astronomes une sorte de malentendu au sujet de la signification du mot convergence. Les géomètres, préoccupés de la parfaite rigueur et souvent trop indifférents à la longueur de calculs inextricables dont ils conçoivent la possibilité, sans songer à les entreprendre effectivement, disent qu'une série est convergente quand la somme des termes tend vers une limite déterminée, quand même les premiers termes diminueraient très lentement. Les astronomes, au contraire, ont coutume de dire qu'une série converge quand les vingt premiers termes, par exemple, diminuent très rapidement, quand même les termes suivants devraient croître indéfiniment [...]." Il comprend que les séries divergentes des mathématiciens sont présentes quasi-partout en astronomie et qu'elles doivent être étudiées en tant que telles...

Définir la somme d'une série divergente !
Commençons par l'exemple $S_0 = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$. Le terme général, qui vaut alternativement $+1$ ou -1 ne tend pas vers zéro et l'analyse classique ne sait pas donner de sens mathématique à la somme S_0. Observons que si S_0 a un sens, alors
$-S_0 = -1+1-1+1-1\ldots$. Si on lui ajoute 1, on retrouve S_0. D'où la relation $1-S_0 = S_0$ qui permet alors de définir S_0 ! On a $2\,S_0 = 1$ donc $S_0 = \frac{1}{2}$. Le résultat n'est pas du tout intuitif ! Considérons maintenant $S_1 = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 + \cdots = 0 + 1 - 2 + 3 - 4 + \ldots$. Si on additionne terme à terme ces deux expressions, on en déduit
$S_1+S_1 = (1+0)+(-2+1)+(3-2)+(-4+3)+\ldots$, c'est à dire $2\,S_1 = 1-1+1-1+\cdots = S_0$. Donc $2\,S_1 = \frac{1}{2}$ et $S_1 = \frac{1}{4}$! Nous renvoyons les lecteurs curieux d'en savoir plus au livre de Jean-Pierre Ramis [21].

Un exemple proposé par Srinivasa Ramanujan
Ramanujan (1887–1920), mathématicien indien autodidacte, consignait ses découvertes dans des carnets mais ne notait jamais les démonstrations ! Il a fallu plusieurs dizaines d'années de travail à toute une équipe d'experts pour les reconstituer [2]. Il a proposé par exemple la relation $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots = -\frac{1}{12}$: une somme infinie de nombre positifs définit un nombre négatif !
L'approche classique pour interpréter cette égalité consiste à introduire la fonction ζ du mathématicien allemand Bernhard Riemann (1826–1866) : $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\ldots$. Cette série converge au sens classique si la partie réelle du nombre complexe s est strictement supérieure à 1 : $\mathrm{Re}\, s > 1$. Notons que la somme $c \equiv 1 + 2 + 3 + \ldots$ de Ramanujan est simplement égale à $\zeta(-1)$, qui correspond à une valeur du paramètre $s = -1$ où la série initiale diverge. De plus, la fonction ζ est analytique : elle peut se développer localement en série, ce qui permet de lui donner un sens au delà de la zone naturellle de convergence. Par exemple, la série $S(x) = 1+x+x^2+\cdots+x^n+\ldots$ converge pour $|x| < 1$ et on a $S(x) = \frac{1}{1-x}$ dans la zone de convergence. Après utilisation de la méthode du prolongement analytique, on peut définir dans l'ensemble du plan complexe la somme de la fonction analytique initialisée

autour de $x = 0$ par la série $S(x)$ comme égale à $\frac{1}{1-x}$. La seule singularité, le seul pôle, est placé en $x = 1$. Pour la fonction ζ c'est la même idée qui est mise en œuvre de façon un peu plus technique et on se reportera par exemple au livre [9] de William John Ellison et Michel Mendès France. Il vient alors $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$ ce qui permet d'écrire par extension $\zeta(-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-1}} = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots = -\frac{1}{12}$.

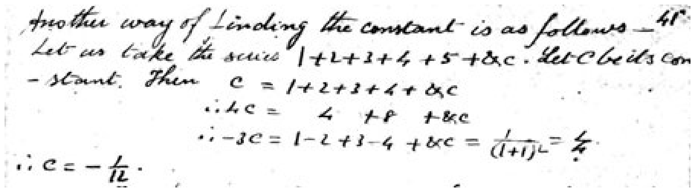
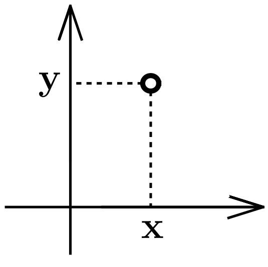

Another way of finding the constant is as follows — 41
Let us take the series $1+2+3+4+5+$&c. Let C be its con-
-stant. Then $c = 1+2+3+4+$&c
$\therefore 4c = \quad 4 \quad + 8 \quad +$&c
$\therefore -3c = 1-2+3-4+$&c $= \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4}$
$\therefore c = -\frac{1}{12}$.

Figure 5. Explication de la formule $1 + 2 + \cdots = -\frac{1}{12}$ au chapitre 8 du premier carnet [2] de Ramanujan.

Dans son carnet, Ramanujan pose simplement $c = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots$. Puis il écrit en dessous $4\,c$ en décalant les termes en face des multiples de deux : $4\,c = 4 + 8 + \ldots$ (voir la figure 5). Il en déduit par soustraction $c - 4\,c = 1 + (2 - 4) + 3 + (4 - 8) + \ldots$ qu'il écrit $c - 4\,c = 1 - 2 + 3 - 4 + \ldots$, c'est à dire la somme $S_1 = \frac{1}{4}$ calculée au paragraphe précédent. On en déduit $-3\,c = \frac{1}{4}$ ce qui conduit au résultat $c = -\frac{1}{12}$!

Les mathématiciens sont-ils dyslexiques ?

Nous voulons pour terminer mettre l'accent sur un défaut, une sorte d'incohérence, dans les notations utilisées actuellement pour écrire les mathématiques. On dispose d'une part des coordonnées cartésiennes (x, y) dans le plan : l'abscisse (x) indique une position de gauche à droite et l'ordonnée (y) une position du bas vers le haut. D'autre part, les mathématiciens britanniques de la fin du 19° siècle, James Sylvester (1814–1897) et Arthur Cayley (1821–1895) entre autres, et les physiciens du début du 20° siècle, et nous citons bien sûr le physicien allemand Werner Heisenberg (1901–1976), ont inventé l'art du calcul avec les tableaux de nombres, les matrices. Un élément de matrice a_{ij} est paramétré par l'indice de ligne (i) et l'indice de colonne (j) : l'indice de ligne (i) est écrit en premier et permet de parcourir la matrice du haut vers le bas ; l'indice de colonne (j) est écrit en second et donne le parcours de la matrice de gauche à droite. Remarquons ici qu'on définit un pavage du plan discret.



$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Figure 6. Dyslexie dans la notation mathématique ? Les coordonnées cartésiennes (x, y) [à gauche] décrivent le plan de gauche à droite avec le premier indice x et de bas vers le haut avec le second y. Les indices (i, j) des matrices a_{ij} permettent de paver un plan discret de haut vers le bas avec le premier indice (i) et de gauche à droite avec le second (j).

Selon le contexte de la géométrie analytique ou de l'algèbre linéaire, on dispose de deux règles différentes pour se repérer dans un plan. Pourquoi ne pas noter les matrices comme les coordonnées des points d'un plan discret ? Alors l'indice i de la notation $A = (a_{ij})$ se lit de gauche à droite et l'indice j se lit de bas en haut. L'indice i est alors relatif aux colonnes et l'indice j aux lignes ! Le tableau A est alors rangé comme suit :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{in} & \cdots & a_{mn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{1j} & a_{2j} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{mj} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{i2} & \cdots & a_{m2} \\ a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{i1} & \cdots & a_{m1} \end{pmatrix}$$

Si $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$, la matrice $A = (a_{ij})$ a maintenant m colonnes et n lignes. Le lecteur vérifiera sans difficulté qu'il ne s'agit pas d'une simple transposition de la notation usuelle. De plus, la diagonale a_{ii} occupe géométriquement la première diagonale. Ainsi la matrice identité ne se note plus $\mathrm{I}_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mais $\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Le produit $A\,B$ des matrices $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ n'est plus égal à $\begin{pmatrix} a\,\alpha + b\,\gamma & a\,\beta + b\,\delta \\ c\,\alpha + d\,\gamma & c\,\beta + d\,\delta \end{pmatrix}$ mais à $\begin{pmatrix} c\,\alpha + a\,\beta & d\,\alpha + b\,\beta \\ c\,\gamma + a\,\delta & d\,\gamma + b\,\delta \end{pmatrix}$. Nous laissons au lecteur le soin de méditer sur cette possible modification des notations matricielles.

Références bibliographiques

[1] Abu Kamil, *Algèbre et analyse diophantienne*, traduction et commentaires de Roshdi Rashed, de Gruyter, 2012.

[2] Bruce C. Berndt, *Ramanujan's Notebooks: Part 1*, Springer Verlag, 1985.

[3] Florian Cajori, *A History of Mathematical Notations*, The Open Court, La Salle, Illinois, 1929.

[4] Augustin-Louis Cauchy, "Sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires" p.57-65 *Bulletin de Férussac*, tome III, pp. 214–221, 1825.

[5] René Descartes, *La Géométrie*, appendice du *Discours de la méthode*, Leyde, 1637.

[6] François Dubois, "Double découverte et sérendipité", in *La Sérendipité ; le hasard heureux*, Éditeurs Danièle Bourcier et Pek van Andel, pp. 239–247, Hermann, Paris, 2011.

[7] François Dubois, *Méthodes mathématiques pour le traitement du signal*, Bookelis, 2019.

[8] William John Ellison, Michel Mendès France, *Les nombres premiers*, Hermann, 1975.

[9] Leonhard Euler, *Institutiones calculi differentialis*, Berlin, 1755.

[10] Gerhard Gentzen, "Untersuchungen über das logische Schliessen. I", *Mathematische Zeitschrift*, volune 39, pp. 176–210, 1935.

[11] Hermann Grassmann, *Die lineale Ausdehnungslehre*, Wiegand, Leipzig, 1844.

[12] Georges Ifrah, *Histoire universelle des chiffres*, Seghers, Paris, 1981.

[13] Pierre Legrand, "Une histoire de notations", *Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public*, numéro 520, pp. 457–466, septembre 2016.

[14] Gottfried Leibniz, "Nova Methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus", *Acta Eruditorum*, volume 3, numéro 10, pp. 467–473, Leibzig, octobre 1684.

[15] Gottfried Leibniz, "De Geometria Recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum", *Acta Eruditorum*, volume 5, numéro 6, pp. 292–300, Leibzig, juin 1686.

[16] Otto E. Neugebauer, *The Exact Sciences in Antiquity*, 1969 ; traduction en français *Les Sciences exactes dans l'Antiquité*, Actes Sud, 1992.

[17] Isaac Newton, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, Londres, 1687. Traduction française par Gabrielle Émilie Le Tonnelier de Breteuil, marquise du Châtelet (1706–1749) : *Principes mathématiques de la philosophie naturelle*, Paris, 1759.

[18] Giuseppe Peano, *Formulaire de mathématiques*, Bocca frères et Ch. Clausen, Turin, 1895.

[19] Léonard de Pise (Fibonacci), *Liber Abaci*, codex conservé à la Biblioteca Nazionale di Firenze, 1202. Voir aussi la traduction en Anglais de Laurence Sigler : *Fibonacci's Liber Abaci: A Translation Into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*, Springer-Verlag, 2002.

[20] Henri Poincaré, *Méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste*, Gauthier-Villars et Fils, Paris, 1892.

[21] Jean-Pierre Ramis, *Séries divergentes et théories asymptotiques*, Panoramas et Synthèses, Société Mathématique de France, Paris, 1993.

[22] Robert Recorde, *The Whetstone of Witte, which is the second part of Arithmetike, containing the Extraction of Rootes, the Cossike Practice, with the Rules of Equation, and the Woorkes of Surde Numbers*, Londres, 1557.

[23] Christoff Rudolff, *Behend und hübsch Rechnung durch die kunstreichen regeln Algebre so gemeincklich die Coss genent werden*, Strasbourg, 1525.

[24] Ernst Schröder, *Vorlesungen über die Algebra der Logik*, B.G. Teubner, Leipzig, 1890.

[25] Charles Seife, *Zéro, la biographie d'une idée dangereuse*, traduction de Catherine Blanchard-Maneval, Jean-Claude Lattès, Paris, 2002.

[26] Michel Serfati, "Descartes et la constitution de l'écriture symbolique mathématique", *Revue d'histoire des sciences*, tome 51, numéros 2–3, pp. 237–290, 1998.

[27] François Viète, *Opera Mathematica*, Bonaventure et Abraham Elzevier, Leyde, 1646.

[28] John Wallis, *De sectionibus conicis ; tractacus geometricus*, Londres, 1655

[29] Johannes Widmann, *Behende un hübsche Rechnung auff allen Kauffmanschafften*, Durch Conradum Kacheloffen, Leipczick, 1489.