AFSCET

Res-Systemica

Revue Française de Systémique

Fondée par Evelyne Andreewsky

Volume 25, Rochebrune 2022

Systèmes complexes ; théorie et pratiques

Res-Systemica, volume 25, article 03

La fonction ζ ou le passage du discret au continu

Philippe Riot

31 pages

La fonction ζ

OU LE PASSAGE DU DISCRET AU CONTINU

Philippe Riot,

chercheur rattaché au laboratoire SCQI de l'ESIEA

« *Peut-être le mystère est-il trop clair.* » E.-A. Poe dans Histoires extraordinaires

Résumé : *Nous proposons une nouvelle interprétation de la fonction* ζ *de Riemann, ce qui permet d'appréhender en particulier la conjecture de Riemann sous un nouvel angle. Il apparaît que son énoncé s'identifie à un axiome qui fixe un modèle du continu.*

Summary : *We propose a new interpretation of the Riemann ζ function, which makes it possible to apprehend in particular the Riemann conjecture from a new angle. It appears that his statement is identified with an axiom that fixes a model of the continuous.*

Remerciements : Le travail théorique dont le présent texte constitue une restitution partielle a été suscité par l'intuition initialement formulée en début de 2013 par Alain Le Méhauté, physicien-chimiste autrefois membre du laboratoire de chimie au centre de recherche de Marcoussis de la société ALCATEL, avec lequel je coopère depuis environ trente

ans. A partir de ses travaux de modélisation relatifs aux phénomènes de relaxation dans les milieux diélectriques engendrant la création d'énergie électrique par des piles, Alain avait émis l'hypothèse d'un lien possible entre la fonction ζ, en particulier sous l'angle de certaines conjectures majeures dites de Goldbach et de Riemann, et les propriétés usuellement dénommées fractales caractéristiques de ces processus.

1 - Appréhender la complexité du monde consiste principalement à ramener le fouillis du réel à une formulation ramassée dans un langage à syntaxe maîtrisée. Etablir des lois revient à résumer une multitude de situations concrètes, potentiellement en quantité infinie et suffisamment cohésives pour être assimilées à un continu, dans une formule de nature discrète et mettant en jeu des paramètres en quantité finie. En d'autres termes, il s'agit toujours de ramener l'infini au fini.

L'objectif de la communication est de montrer que la fonction ζ permet de rendre compte formellement du passage du discret au continu, donc également du fini à l'infini. Néanmoins, le continu est mathématiquement largement indéterminé ; il est nécessaire en général d'introduire de nouveaux axiomes pour le fixer. Cela s'applique à la fonction ζ ; concrètement il existe un axiome permettant de définir le continu associé naturellement à cette fonction qui s'exprime selon l'énoncé de la conjecture de Riemann.

2 – Toute démarche rationnelle, sinon scientifique, repose sur quatre opérations fondamentales simples qui sont effectives, c'est-à-dire calculables, sous condition de dénombrabilité :

- Lister des objets, impliquant l'introduction d'un ordre linéaire, voire d'un ordre linéaire total,
- Nommer ou étiqueter des objets ou points, ce qui présuppose une hypothèse de séparation,
- Typer ou encore attribuer des propriétés, autrement dit regrouper des objets partageant des caractéristiques communes ce qui consiste à identifier un systèmes d'ouverts topologiques ; cela appelle une hypothèse d'effectivité qui est alors appelée propriété de Lindelöf,
- Relier les propriétés entre elles, en particulier pour rendre compte d'une dynamique par exemple paramétrée par le temps ; cela est modélisé par une seconde relation qui peut prendre la forme d'une structure d'ordre partiel ou plus généralement une structure de catégorie.

La construction d'un modèle, quel que soit son degré de mathématisation, repose sur l'usage d'un langage qui introduit la dualité syntaxe et sémantique ; une syntaxe effective est nécessairement au plus dénombrable, et même pratiquement finie quoiqu'éventuellement très grande, tandis que la sémantique est potentiellement supposée très riche jusqu'à atteindre ultimement la puissance du continu, même si formellement on peut tenter de viser au-delà. La capacité de relier de manière canonique le dénombrable et le continu constitue la trame systématique, mais la plupart du temps masquée, de la rationalité.

3 – Il ne s'agit pas ici de détailler la démonstration complète des résultats principaux énoncés, mais d'en dégager la justification de manière synthétique et intuitive. Les démonstrations formelles feront l'objet d'une autre publication dont la rédaction est en cours.

4 – L'ensemble des entiers naturels N est caractérisé par l'axiome du successeur de Peano avec la donnée d'un élément initial et l'opérateur s engendrant l'élément noté n+1 à partir de l'élément n. La structure ainsi créée est un monoïde. Il existe une autre manière d'aboutir à ce résultat.
Considérons en effet deux ensembles de petite taille, le premier ne comprenant qu'un seul élément noté $*$ et le second comprenant ce même élément $*$ et un autre noté $\blacksquare$; il existe deux seuls morphismes, ou flèches, entre le premier et le second. Ce fait peut se lire comme rendant compte du fait que l'élément $*$ demeure égal à lui-même, dans ce cas le morphisme est l'identité, ou bien que cet élément est transformé en un autre, dans ce cas le morphisme est appelé différence ; ce qui est synthétisé par le diagramme suivant :

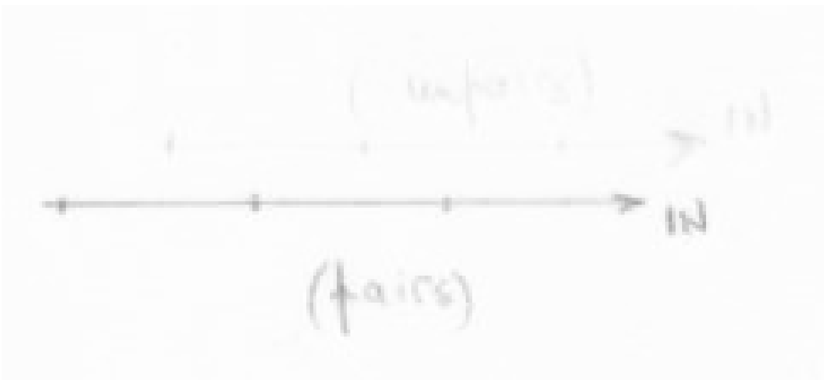
$$\{*\} \underset{\text{dif}}{\overset{\text{id}}{\rightrightarrows}} \{*, \blacksquare\}$$

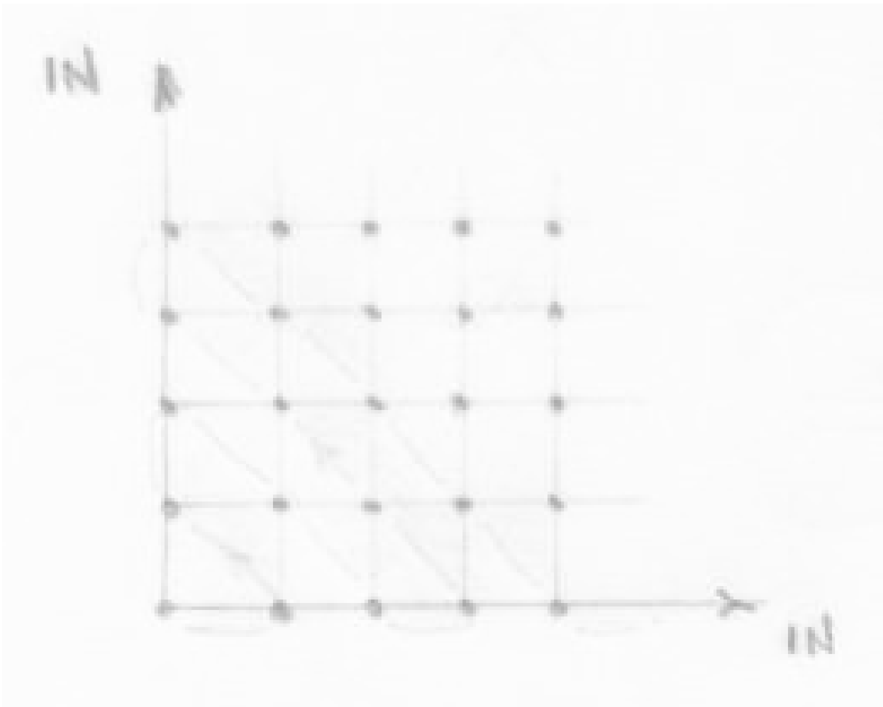
La construction, classiquement appelée conoyau, consiste à prolonger les deux morphismes précédents dans un morphisme supplémentaire de telle sorte que les deux compositions résultantes soient égales. Autrement dit, les deux éléments $*$ et $\blacksquare$ sont plongés dans un ensemble plus grand par rapport auquel le déplacement de l'un vers l'autre ne crée pas de différence puisque la liste des éléments potentiellement accessibles par l'itération de tels déplacements demeure de la même taille, à savoir l'infinité dénombrable, donc bijective à un même unique ensemble identifiable à N tout entier (une expérience de pensée illustre bien la situation : une personne grimpe le long d'une échelle infiniment allongée, en passant d'un barreau au suivant, cette personne à l'impression de faire du sur-place puisqu'elle voit toujours une infinité de barreaux devant ses yeux). On peut résumer la situation en disant que l'ensemble N, modèle canonique de l'infini dénombrable, « co-égalise » l'identité et la différence. Ce schéma de création de nouveaux objets est un procédé très présent dans de nombreuses théories mathématiques. Plus précisément, l'identification de N comme conoyau est une autre manière d'expliciter le principe de récurrence selon lequel une propriété vérifiée pour un élément, puis transféré systématiquement par l'opérateur successeur, est en fait valide sur l'ensemble N tout entier.

5 – L'ensemble des entiers naturels est classiquement muni d'une seconde opération, la multiplication. La plus simple manière de l'appréhender consiste à poser la multiplication comme une itération de l'addition ; ainsi, pour illustrer cette propriété, 2×3 peut se définir comme 2+2+2 = 6. Comme cette opération est commutative, $2\times3 = 3\times2$, la même opération se lit également comme 3+3 = 6. Par ailleurs, l'itération se comprend aussi comme un changement d'échelle, autrement dit comme un changement d'unité sur une règle graduée. La multiplication arithmétique est l'addition vue à une autre échelle.
Le recours à une première opération introduit le concept d'algèbre en tant que structure close pour une opération combinant deux éléments pour en obtenir un troisième appartenant à cette même structure. D'un point de vue formel, l'opération + se comporte comme l'union ensembliste de deux ensembles disjoints. En parallèle, l'opération $\times$ (multiplication) se comporte comme l'intersection ensembliste, et peut être engendrée par changement d'échelle de telle sorte que l'introduction de la multiplication engendre le concept de voisinage et fait émerger une structure topologique. Il en résulte que N muni des deux opérations + et $\times$ relève à la fois de l'algèbre et de la topologie. A l'intersection de ces deux structures fondamentales se trouve être celle de compacité qui consiste formellement et intuitivement à « rabattre » l'infini sur le fini. En effet, la compacité est généralement abordée en topologie par les deux propriétés

équivalentes suivantes (équivalence acquise moyennant le respect de certaines conditions sur lesquelles nous faisons l'impasse pour éviter trop de détails techniques) : un espace topologique est réputé compact si, à partir d'un recouvrement de taille quelconque en général infini d'ouverts, il est possible d'en extraire un recouvrement fini. Comme un ouvert topologique correspond à un collectif de points de l'espace qui vérifient une propriété donnée, l'hypothèse de compacité signifie que l'espace concerné, dont la description comporte initialement une infinité de propriétés, peut être décrit grâce à une liste finie de propriétés caractéristiques. De toute suite d'éléments d'un espace compact on peut en extraire une sous-suite convergente, la convergence étant en particulier exprimée sous la forme du critère de convergence de Cauchy et signifiant qu'au-delà d'un certain rang deux éléments quelconques de cette suite se trouvent écartés l'un de l'autre d'une valeur infiniment petite. En adoptant une topologie particulière dite topologie de Scott qui permet d'identifier les fonctions calculables avec les fonctions continues, le critère revient à dire que la quantité limite peut être approchée d'aussi près qu'on le souhaite en un nombre fini d'étapes de calcul. Les deux expressions de la compacité qui viennent d'être rappelées explicitent clairement la possibilité de saisir l'infini par le fini.

Puisque les deux opérations, l'addition et la multiplication, respectent par construction la structure arithmétique, il en résulte que N vérifie la double propriété fondamentale d'invariance d'échelle : $N \times N \cong N \cong N \uplus N$ (union disjointe). Ce double isomorphisme est illustré par les deux exemples simples suivants. Si vous distinguez les entiers pairs et impairs vous obtenez deux copies distinctes de N en lisant de manière ordonnée et en faisant de nouveau appel à ce même ensemble N pour étiqueter leurs éléments respectifs. La première équivalence s'illustre aisément grâce à la figure suivante qui rend compte du fait que l'on peut aussi énumérer tous les éléments du produit $N \times N$ en les étiquetant par une nouvelle règle grâce au seul ensemble N de départ.





6 – L'addition dans N introduit une relation d'ordre naturelle : l'entier n est dit inférieur à l'entier m si l'on peut obtenir m en partant de n et en appliquant plusieurs fois l'opérateur successeur. Cela s'écrit $n \leq m$. L'ensemble N muni de cette relation constitue l'exemple canonique d'une structure d'ordre dite linéaire où deux éléments quelconques sont systématiquement classés l'un par rapport à l'autre avec la propriété fondamentale additionnelle que

toute collection finie d'entiers admet un plus petit élément ; on dit alors que cette structure d'ordre constitue un bon ordre.

La multiplication, quoique directement issue de l'addition, débouche sur un enrichissement considérable de la structure interne de N au travers de la relation de divisibilité. En effet, si l'on considère un couple d'entiers n et m, en général il n'est pas possible de trouver un troisième entier permettant de passer de l'un à l'autre par multiplication par ce troisième. Lorsque cela est possible les deux entiers considérés sont dits appartenir à la même classe de divisibilité et sont considérés comme équivalents. Cette configuration est appelée relation de congruence et les classes d'équivalence sont appelées des idéaux. Sous l'angle de la divisibilité, des entiers se distinguent par la propriété remarquable qu'ils ne sont divisibles que par 1 et par eux-mêmes ; ils sont dits premiers. De plus, tous les entiers s'écrivent de manière uniques comme produits d'une quantité finie de puissances d'entiers premiers, les exposants étant eux-mêmes des entiers.

La particularité des entiers premiers est de servir de pivot pour relier directement les structures ensembliste, algébrique, topologique et probabiliste sous-tendant N. En effet, le concept d'idéal est l'outil majeur pour étudier la structure algébrique d'anneau ; ce concept peut être appréhendé de manière duale sous la dénomination de filtre, famille de sous-ensembles stable par intersection finie et par l'opération de sur-ensemble à partir d'un sous-ensemble appartenant à la famille. Ainsi la notion de filtre permet de traiter des « grands » ensembles et débouche sur la notion de propriété presque partout définie, et sert finalement à formaliser la notion de convergence de suite d'éléments.

7 – Rappelons à ce stade que l'ensemble des entiers naturels peut être agrandis en plusieurs étapes en acquérant de nouvelles propriétés ; il en résulte les emboîtements suivants :

$N \subset Z \subset Q \subset R$ tels que :

- Passage à Z (entiers relatifs) : structure d'anneau par classe d'équivalences à la Grothendieck
- Passage à Q (nombres rationnels) : structure de corps par calcul de fractions (changements d'échelle)
- Passage à R (nombres réels) : structure de corps complet (critère de Cauchy) par coupures de Dedekind

Toutes ces structures sont des ordres linéaires non isomorphes entre eux.

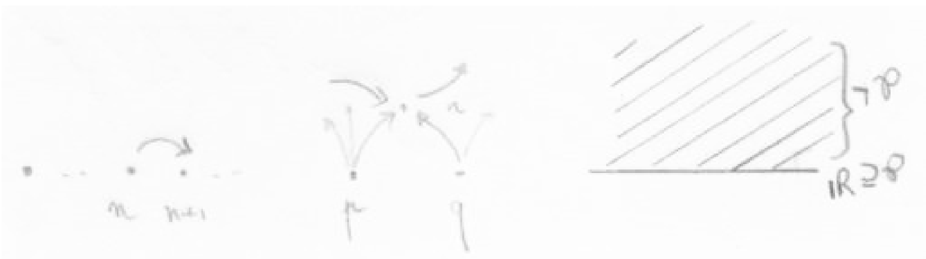
Cependant il apparaît une incompatibilité remarquable, à savoir l'opérateur successeur dans N n'est pas continu dans R muni de sa topologie usuelle. Cela se manifeste de plusieurs manières que nous rapportons succinctement. Une fois encore les entiers premiers se distinguent en ce qu'ils sont seuls assimilables à des nombres réels. Leur propriété caractéristique d'être premier se réfléchit dans une propriété que partagent certains ouverts de R muni de la topologie usuelle, celle d'être irréductibles. A tout point x d'un espace topologique X est naturellement associé l'ouvert X

$\setminus \underline{\{x\}}$. Un ouvert W, ici pris égal à X $\setminus \underline{\{x\}}$, est dit irréductible si pour deux autres ouverts U et V l'implication suivante a lieu :

$\mathrm{U} \cap V \subseteq \mathrm{X} \setminus \underline{\{x\}} \Rightarrow \mathrm{U} \subseteq \mathrm{X} \setminus \underline{\{x\}}$ ou $\mathrm{V} \subseteq \mathrm{X} \setminus \underline{\{x\}}$

Il en résulte que seuls les entiers premiers sont identifiables, d'un point de vue topologique, à des éléments de R.

Par ailleurs, revenons à l'opérateur successeur de l'arithmétique de Peano, noté S, et supposons le continu pour la topologie de R. Comme R est un espace connexe (on peut toujours relier deux points quelconques de R en demeurant dans cet espace), si S est continue, alors son image est également connexe, tandis que le complément d'un point dans R ne l'est pas, fait résultant de la dimension 1 de celui-ci. Par définition de l'opérateur successeur, l'image de S omet un unique point et, par suite, son image n'est pas connexe. Par conséquent S n'est pas continue dans R. En faisant appel à un théorème classique de Brouwer, S demeure non continue dans un espace topologique produit R^n. Il paraît cependant raisonnable de déployer la structure complète de N dans le demi-plan au-dessus de la droite réelle. Pour cela il est judicieux de faire appel à l'algèbre en identifiant tout sous-espace de R^2 comme sous-espace du corps des complexes C. Soit M un modèle topologique de taille $\leq c$ (puissance du continu) pour représenter les corps algébriques ; les entiers dans ce modèle constituent le demi-anneau Z^M. A partir de ce dernier nous construisons le corps des fractions et le corps des nombres algébriques A. A est un corps algébriquement clos de caractéristique 0 ; il s'en suit que A est isomorphe à C. De plus, l'arithmétique des nombres complexes est continue par rapport à la topologie usuelle de R^2. Par conséquent, M et donc C est un modèle topologique de l'arithmétique dans lequel l'opérateur successeur est continu. Ce résultat manifeste le caractère fondamentalement bidimensionnel de N et justifie le fait, de prime abord surprenant, que l'étude fine des propriétés arithmétiques exige le recours au corps des complexes en lieu et place de celui des réels. Ce fait remarquable est bien établi en théorie de l'arithmétique dans laquelle l'étude fine des entiers naturels exige le recours aux nombres complexes et à la théorie des fonctions analytiques.



8 – La fonction ζ dite de Riemann est un exemple canonique d'une famille plus large de fonctions qui a été initialement définie et étudiée par Gian-Carlo Rota, famille de fonctions associée à un ordre partiel localement fini, c'est-à-dire dans lequel tout intervalle est fini, et à une algèbre commutative A. L'algèbre de convolution, encore appelée algèbre d'incidence consiste dans les morphismes :

$$f : P \times P \rightarrow A \quad f(x,y) = 0 \text{ si } x \nleq y$$

L'opérateur de convolution qui lui est attaché est classiquement défini par l'identité :

$$(f * g)(x, y) = \sum_{z/x \leq z \leq y} \quad f(x, z)g(z, y)$$

L'identité pour cet opérateur vaut : $\delta(x, y)$ = 1 si x = y et 0 ailleurs. La fonction zêta pour cette algèbre est alors définie par l'égalité : $\zeta(x, y)$ = 1 si x $\leq$ y et 0 ailleurs. Une troisième fonction joue également un rôle important ; elle est mentionnée pour compléter le tableau même si elle ne sera pas utilisée dans la suite de l'exposé. Il s'agit de la fonction de Möbius μ qui vérifie l'identité : $\zeta * \mu = \mu * \zeta = \delta$.

Dans le cas particulier de la structure de divisibilité dans N ; l'intervalle intervalle $[m, n]$ constitue le treillis des diviseurs de n/m et $\zeta(m, n) = \zeta(1, n/m) = \zeta(n/m)$.
De telles structures se généralisent aux catégories grâce en particulier aux travaux de Lawvere. La fonction ζ permet de dénombrer les flèches qui arrivent ou qui partent d'un objet donné, ou encore de dénombrer les flèches qui s'intercalent entre deux objets.

9 – La fonction zêta attachée à N admet une double égalité définitoire :

$$\sum_{n\in N} \quad n^{-s} = \zeta(s) = \prod_{p\in\wp} \quad (1-p^{-s})^{-1}$$

Le membre de droite se développe de manière plus explicite puisque l'inverse donne lieu à la série formelle : $(1-p^{-s})^{-1} = 1+p^{-s}+p^{-2s}+\cdots$

Il est éclairant de conserver liée cette double écriture et de la lire en interprétant le symbole Σ soit comme le quantificateur existentiel, soit comme l'opérateur booléen « ou » (exclusif), et en parallèle le symbole Π soit comme le quantificateur universel, soit comme l'opérateur booléen « et ». La double identité ne dit pas autre chose que la propriété fondamentale de l'arithmétique signifiant la décomposition de tout entier en produit de nombres premiers. En d'autres termes, la formule $\zeta(s)$, à la présence près de l'argument s, joue le rôle d'un prédicat énonçant cette propriété qui caractérise la nature arithmétique des grandeurs impliquées.
Cette lecture, qui peut apparaître en première analyse comme un simple artefact, est justifiable d'un point de vue théorique. Sans entrer dans les démonstrations détaillées, nous pouvons néanmoins avancer les arguments suivants pour expliquer le bien-fondé de cette lecture. Deux ordres d'arguments qui sont au demeurant reliés entre eux corroborent cela.

La notion d'adjonction en théorie des catégories généralise cette même notion existant en algèbre linéaire et qui exprime une forme d'inversion. Soit un couple de foncteurs entre deux catégories A et B :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, shift left, "F"] & \mathcal{B} \arrow[l, shift left, "G"] \end{tikzcd}$$

Cette situation est notée : F ⊣ G et signifie au plan des ensembles des homomorphismes :

$$B(F(A), B) \cong A(A, G(B))$$

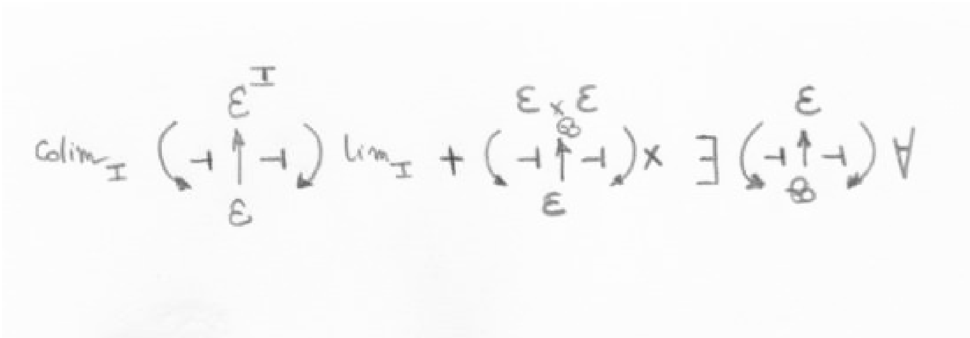
Dans le cas particulier des structures d'ordre, l'adjonction prend la signification suivante :

$$f : X \to Y \text{ et } g : Y \to X \qquad f(x) \leq y \Leftrightarrow x \leq g(y)$$

Pour f monotone, son adjoint g est défini par : $g(y) = \bigvee\{x \in X \,/\, f(x) \;\leq\; y\}$ et alors f préserve tous les sup.

Il est alors possible d'établir plusieurs schémas de doubles adjonctions qui correspondent fondamentalement à une structure fibrée commune :

$$\exists \dashv \mathrm{id} \dashv \forall \qquad (\dashv \; id \dashv lim) \text{ ou encore} (dom \dashv id \dashv cod)$$



Comme cela a d'ores et déjà été mentionné, il est possible d'identifier les foncteurs Σ et Π avec respectivement $\exists$ et $\forall$; de plus grâce au développement $(1-p^{-s})^{-1} = 1+p^{-s}+p^{-2s}+\cdots$, la correspondance $p^{-s} \longmapsto$ exposant de p^{-s} se lit comme opérateur d'implication d'Heyting impliqué dans le calcul de l'adjonction. Ainsi la fonction ζ se substitue, en tant qu'interpolateur, au foncteur identité dans le double schéma d'adjonction précédent.

Le rôle de la fonction ζ se lit également comme prédicat interpolateur entre les deux quantificateurs $\exists$ et $\forall$. En effet, la double égalité de définition :

$$\sum_{n\in N} n^{-s} = \zeta(s) = \prod_{p\in\wp} (1-p^{-s})^{-1}$$

s'écrit dans le langage de la logique des prédicats :

$$\alpha(n,s) \vdash \zeta(s) \vdash \gamma(s,p)$$

Il suffit alors de faire appel à un théorème important établi en 1957 par Craig, lequel théorème a été redémontré dans le cadre de la théorie des catégories par Pitts en 1983 pour identifier la fonctionnelle $\zeta(s)$ comme le prédicat interpolateur entre les deux prédicats $\exists$ et $\forall$. Sans entrer dans les détails de la démonstration de ce résultat intéressant, il est néanmoins utile de fournir quelques éléments de justification. Selon une intuition fondamentale mise à jour par W. Lawvere, ces deux quantificateurs sont les adjoints à gauche et à droite de l'opération de substitution de telle sorte que le rôle des quantificateurs s'interprète comme suppression de certaines variables :

$$\varphi(y) \vdash \forall z . \psi(z,y) \iff \varphi(\cancel{z},y) \vdash \psi(z,y)$$
$$\exists z . \psi(z,y) \vdash \varphi(y) \iff \psi(z,y) \vdash \varphi(\cancel{z},y)$$

L'interpolation est possible sous l'hypothèse d'indépendance des variables exprimée sous une forme communément appelée condition de Beck-Chevalley; ainsi toute variable est invariante sous quantification portant sur d'autres variables. Cela est équivalent à affirmer que différentes variables n'interfèrent pas les unes avec les autres dans une démonstration comme $\alpha(x,y) \vdash \gamma(y,z)$ dans laquelle x ne tient aucun rôle dans la démonstration de $\gamma(y,z)$, z ne tient aucun rôle dans la démonstration de $\alpha(x,y)$. Le théorème d'interpolation signifie que dans une telle situation, il existe un prédicat intermédiaire dit interpolant $\beta(y)$ tel que :

$$\alpha(x,y) \vdash \beta(y) \vdash \gamma(y,z)$$

10 – Repartons une fois encore de la double égalité : $\sum_{n\in N} \quad n^{-s}$ $= \zeta(s) = \prod_{p\in\wp} \quad (1-p^{-s})^{-1}$, si l'on néglige la présence de

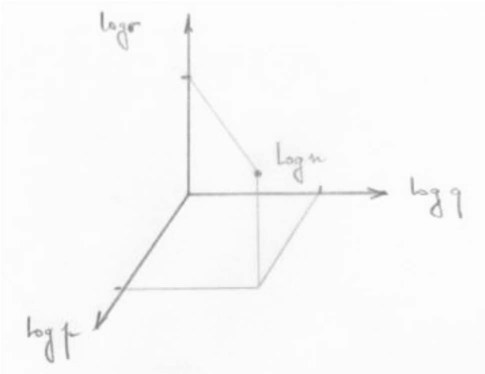
l'exposant en « $-s$ », le membre de gauche consiste à sommer les entiers et aboutit au cardinal infini dénombrable $\aleph_0$, tandis que le membre de droite met en jeu des facteurs qui sont des puissances entières quelconques d'entiers, autrement dit des éléments de N^N (ensemble des fonctions de N vers N), ensemble de cardinal $2^{\aleph_0}$ = c, puissance du continu. Ce constat met en évidence que la fonction ζ organise une liaison entre l'infini dénombrable et le continu :

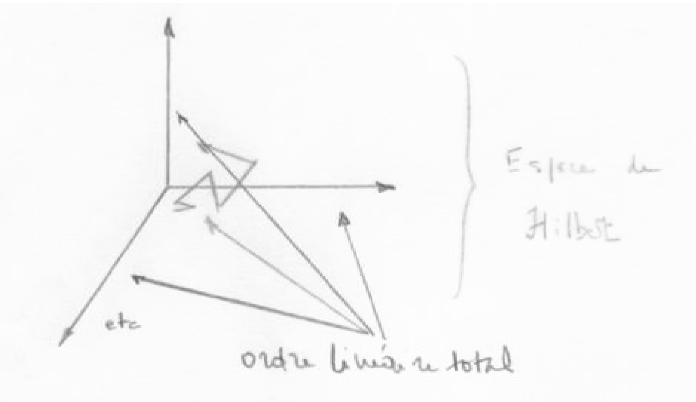
$$\aleph_0 \overset{\zeta}{\Rightarrow} 2^{\aleph_0} = c$$

Il existe une autre façon d'expliciter ce passage du dénombrable au continu. La décomposition de tout entier en produit de facteurs premiers se transforme par la fonction logarithme, qui avec son inverse exponentielle respecte la structure d'ordre, en l'égalité :

$$\text{n} = \prod_{p\in P} p^{\alpha_{n,p}}, \log \text{n} = \sum_{p\in P} \alpha_{n,p} \log \text{p}$$

en considérant la puissance n^{-s}, on aboutit à une expression similaire par multiplication du facteur complexe « $-s$ ». Cette écriture invite à introduire l'espace linéaire engendré par une quantité infinie dénombrable d'axes étiquetés par les grandeurs indépendantes entre elles log p avec p entier premier. Un entier n engendre un vecteur dans cet espace admettant qu'un nombre fini de coordonnées non nulles. Ces vecteurs sont en correspondance biunivoque avec les termes n^{-s}, la sommation de tous ces termes redonne la grandeur $\zeta(s)$. Autrement dit la fonction ζ s'obtient comme superposition d'espaces discrets de même dimension infinie dénombrable avec des axes indépendants étiquetés par les entiers premiers, superposition paramétrée par le coefficient complexe « s » qui parcourt un domaine ayant la puissance du continu.





11 – Nous venons de voir que ζ sert d'interpolation ; constatons à présent que cette fonction réalise également une opération de compactification par référence à une topologie adaptée, celle de Scott. Si X est un ensemble quasi-ordonné, D ⊆ X orienté quand deux points de D admettent une borne supérieure dans D. Un ouvert de Scott est un ensemble U ⊆ X, $U^{\uparrow}$ = U, pour toute famille orientée (x_i) avec sup x_i existant et sup x_i ∈ D, alors il existe i tel

que $x_i \in$ U. Cette topologie a été introduite pour transformer les procédures de calcul en opérateurs topologiques ; un calcul répond à un programme et la relation d'ordre $\leq$ reçoit une interprétation de nature informationnelle de telle sorte que, si x $\in$ U est le résultat d'un calcul, il existe n fini (nombre fini d'étapes de calcul) tel que $x_n \in$ U. Ainsi un ouvert de Scott correspond à sous-ensemble accessible par calcul en temps fini. Il en résulte qu'une fonction continue s'identifie à une fonction calculable, en tant que résultat d'un programme.

Alors U ouvert si χ_U: U $\rightarrow S$ avec $\chi_U(x)$ = V si et seulement si x $\in$ U (la fonction χ_U est appelée la fonction caractéristique de l'ensemble U). Les axiomes des ouverts, à savoir la stabilité par $\bigcup$ quelconque, et la stabilité par $\bigcap$ fini, sont naturellement satisfaits.

Avec la topologie de Scott, le quantificateur existentiel est toujours continu ; cela rend compte du fait intuitif que pour prouver l'existence d'un élément il suffit d'examiner les éléments les uns après les autres, dès qu'un élément atteint en temps fini vérifie la propriété considérée la preuve existentielle est acquise. En revanche le quantificateur universel n'est pas toujours continu puisque précisément il faut parcourir l'ensembles des éléments avant de garantir la satisfaction universelle d'une propriété ; cela n'est naturellement acquis que pour un ensemble fini ; plus généralement cela sera aussi obtenu si l'ensemble est compact. Comme la fonction ζ est définie par la double identité impliquant à la fois les deux quantificateurs, il en résulte que cette fonction est continue pour la topologie de Scott grâce à la présence de ∃, et qu'en parallèle l'ensemble des entiers premiers est nécessairement compact au travers de la présence de ∀.

12 – A ce stade et en résumé, ζ est constitué comme « c copies de N «, qui peut être considéré comme la construction d'un modèle de l'arithmétique stable par invariance d'échelle absolue ; en parallèle, ζ procède à une compactification de N. Cette double caractérisation permet d'appréhender la construction de ζ comme un emboîtement de suites dans N avec la règle selon laquelle à chaque étape tout ensemble d'entiers naturels est identifié à un filtre de Fréchet, c'est-à-dire que deux ensembles sont identifiés s'ils ne diffèrent que par un sous-ensemble fini de leurs éléments. L'introduction de ce filtre permet de raisonner avec N traité comme compact. Il est possible de montrer que ce mécanisme de compactification se révèle dans l'expression de ζ par la présence du signe « $-$« devant l'argument complexe « s ».
Mais la convergence de suites, permise grâce à l'hypothèse de compacité, dans le cadre de la composition de suites emboîtées ne permet pas de dépasser le premier ordinal non dénombrable, ordinal naturellement limite (qui n'est donc pas un successeur d'ordinaux) usuellement noté ω_1. Or par construction la fonction ζ implique d'explorer l'intervalle ordinal situé entre ω_1 et c (puissance du continu).

Il est important de souligner que le continu (c) n'est pas déterminé dans le cadre classique de la théorie des ensembles, à savoir la théorie dite de Zermelo-Fraenkel auquel est adjoint l'axiome du choix (la théorie correspondante est usuellement dénommée par l'acronyme ZFC), ce dernier axiome est essentiel pour garantir l'existence de filtres optimaux, appelés ultrafiltres, exigée pour établir la démonstration des résultats rapportés dans la présente note de synthèse. Par conséquent, l'étude fine des propriétés fonctionnelles de ζ ne peut pas être développée en l'absence d'axiomes supplémentaires fixant plus précisément la nature du continu.

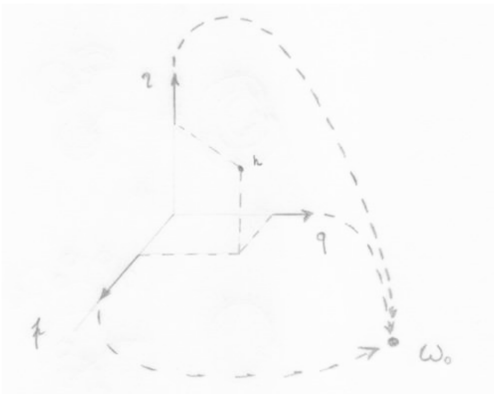
13 – Une première option surgit immédiatement à l'esprit. Pourquoi ne pas supposer que :

$$\omega_1 = c$$

Cette hypothèse est parfaitement identifiée depuis Cantor ; elle s'appelle classiquement l'hypothèse du continu. Depuis les travaux essentiels de Gödel, puis de Cohen, on sait que cet axiome est indépendant des autres axiomes de la théorie de base ZFC. En fait, cet axiome s'avère trop exigeant ; nous allons maintenant avancer des arguments en faveur d'un autre axiome nettement moins fort et qui est implicitement suggéré par la construction même de la fonction ζ. Pour l'introduire il convient de partir d'un résultat classique de topologie qui relie N à R, autrement dit l'infini dénombrable ($\aleph_0$) au continu (c) ; il s'agit du théorème des catégories de Baire.

Un espace topologique est dit de première catégorie s'il est union dénombrable d'ensembles nulle part denses. Ainsi le complément de tout ensemble de 1ière catégorie sur la droite réelle est dense et aucun intervalle réel n'est de 1ière catégorie ; enfin l'intersection de toute suite d'ouverts denses dans l'intervalle fermé $[0,1]$ est dense. Ce résultat est à rapprocher d'un théorème également classique dans les algèbres de Boole, dû à Rasiowa et Sikorski selon lequel si : $(P, \leq)$ ensemble partiellement ordonné (EPO) et p $\in P$. Si D famille dénombrable de sous-ensembles denses de P, il existe alors un filtre D-générique F de P tel que p $\in$ F où la notion de généricité signifie que tout élément du filtre rencontre un membre de la famille D.

Il est pertinent de relever que le théorème fondamental de l'arithmétique peut être lu comme une mise en forme de ce dernier résultat avec comme famille l'ensemble des entiers premiers qui peut être vu comme cofinal grâce au caractère compact de cette famille.



Avec ω_0 : compacité de N, $|N| = |P| = \aleph_0$.

Il s'agit d'étendre ce théorème en remplaçant l'hypothèse du caractère dénombrable du cardinal de la famille D par celle de la présence d'une famille ayant la puissance du continu. L'énoncé visé est alors le suivant : $(P, \leq)$ ensemble partiellement ordonné et p $\in P$. Si D famille de sous-ensembles denses de P, avec $|D| < c$; il existe alors un filtre D-générique F dans P tel que p $\in$ F (■)

Notons immédiatement que cet énoncé est en accord avec la situation offerte par ζ qui introduit une famille ayant la puissance du continu de copies de N, soit encore de copies de P, ensembles des entiers premiers. L'énoncé (■) est impliqué par l'hypothèse du continu (HC); il est en revanche faux sous $\neg$ HC. Il est alors nécessaire d'introduire une condition supplémentaire, à savoir la condition d'(anti)-chaîne dénombrable (cad). Cette condition est évidemment satisfaite dans le cas de figure qui nous intéresse ici puisque P vérifie canoniquement la cad. Nous aboutissons à ce qui est appelé l'axiome de Martin, l'axiome de forcing non trivial le plus simple et le plus fertile proposé en 1970 :

Axiome de Martin (AM) : $(P, \leq)$ EPO vérifiant la cad. Si D famille de sous-ensembles denses de P, avec $|D| < c$; il existe alors un filtre D-générique F dans P

Il est immédiat que : HC $\Longrightarrow$ AM.

Un résultat important de la théorie du forcing signifie que : AM $+ \neg$ HC est consistant avec la théorie des ensembles ZFC. De plus AM est compatible avec toute valeur de $c \geq \aleph_1$. En ce sens, l'axiome AM est nettement plus faible que l'hypothèse du continu. Sous AM ; $2^{\omega} = 2^{\kappa}$ pour tout $\kappa < c$. Ainsi la combinatoire infinie est uniforme pour tout cardinal inférieur au continu ; nous voyons clairement le profit tiré de cette propriété lorsqu'il s'agit de sommer c copies de N, en quoi consiste essentiellement ζ. Ce même résultat peut encore être formulé comme suit : Sous AM toute union de moins de c sous-ensembles maigres, ou nuls, de R^n est maigre, ou nul, dans R^n , ce qui correspond une fois encore à la situation étudiée.

14 – Il est pertinent d'examiner s'il est possible d'exprimer l'axiome de Martin d'une autre manière. Pour cela nous nous référons à une mise en forme qui fait appel aux partitions et due à S. Todorcevic et B. Velickovic. Considérons un ensemble indénombrable S tel que l'espace des ensembles finis dans S est l'objet d'une bipartition :

$$S^{<\omega} = K_0 \cup K_1$$

La condition cad précédente se reformule dans ce contexte par la combinaison de trois conditions :

(a) $\{x\}$ dans K_0 pour tout élément x $\in S$

(b) Un sous-ensemble de K_0 est également dans K_0

(c) Tout sous-ensemble indénombrable dans K_0 possède deux éléments dont l'union est dans K_0

AM est équivalent à l'énoncé (L) :

S de taille $< c$, $[S]^{<\omega}$ = $K_0 \cup K_1$ partition cad; alors S peut être recouvert par une quantité dénombrable d'ensembles S_n tels que $[S_n]^{<\omega} \subseteq K_0$ pour tout n

Dans le cas d'espèce, cet énoncé paraît peu lisible. Nous allons l'identifier à un résultat d'ores et déjà acquis portant sur certaines propriétés fonctionnelles déterminantes de ζ . En effet, deux théorèmes ont été obtenus entre 1975 et 1980 par Voronin et Bagchi. Le premier résultat dit que ζ comme objet fonctionnel terminal ; plus précisément :

Pour K compact dans la bande critique 1/2 < σ < 1 avec complément connexe et pour f(s) fonction continue ne s'annulant pas sur K et analytique dans son intérieur; Alors

$\forall$ ε>0, lim inf qd T→∞ 1/T mes {τ∈[0,T]; Max |ς(s+iτ) – f(s)|<ε}>0

Le second résultat fournit un énoncé équivalent de la conjecture de Riemann, à savoir que :
l'hypothèse de Riemann est vraie si et seulement si, pour tout compact K de la bande critique $1/2<\sigma<1$ avec complément connexe et

$$\forall\ \varepsilon>0,\ \liminf_{T\to\infty} 1/T\ \mathrm{mes}\{\tau\in[0,T];\ \mathrm{Max}\ |\varsigma(s+i\tau) - \varsigma(s)|<\varepsilon\}>0$$

Le critère de Bagchi revient à vérifier les conditions cad de l'énoncé de l'axiome de Martin en termes de particions. En effet, si K_0 est formé d'ensembles N à une échelle « s + iτ » avec :

$$t-\delta < |s| < t+\delta \text{ et } |\tau - \varphi| < \eta$$

Le critère (c) précédent est satisfait.

En conclusion, l'axiome de Martin est équivalent à l'énoncé de la conjecture de Riemann. Cela implique en particulier que cette conjecture n'est pas prouvable dans la théorie ZFC, mais d'il s'agit d'un axiome qui lui est cohérent. Autrement dit, ζ met en forme le procédé de la diagonale de Cantor permettant d'engendrer le continu (c) à partir du dénombrable (ordinal ω, ou cardinal $\aleph_0$). L'ajout de l'axiome de Martin/Riemann détermine précisément ce continu.

15 – Le rôle de la fonction ζ est bien connu en arithmétique ; cependant son interprétation est trop fréquemment confusément présentée. Notamment les propriétés de la fonction, y compris la soi-disant conjecture de Riemann, ne servent pas à déterminer la distribution des entiers premiers puisque ceux-ci sont précisément calculés par référence à l'ordre linéaire additif des entiers, et ceci depuis fort longtemps grâce au crible d'Eratosthène, mais bien davantage à « caler » le continu par rapport au discret décrit par l'ensemble des entiers premiers (alphabet dénombrable) en fixant un modèle déterminé par un axiome adéquat, à savoir l'axiome de Martin généralisant le théorème de la catégorie de Baire. Cet axiome admet une autre formulation mieux adaptée à la description des propriétés fonctionnelles de la fonction ζ sous la forme de l'énoncé classiquement connu sous le vocable de conjecture de Riemann.

16 – La nouvelle interprétation de la fonction ζ permise par les travaux que nous venons de restituer de manière synthétique implique de nombreuses conséquences applicables non seulement en mathématiques pures, mais également dans de multiples domaines puisque le passage du discret au continu, ou plus généralement l'interpolation entre les deux de foncteurs antagonistes tels que colim/lim ou $\exists/\forall$ ou encore $\ominus/\boxdot$ (modalités possible/nécessaire) interviennent de manière fondamentale et récurrente dans presque toute démarche rationnelle.

Bibliographie sommaire :

- Généralité sur ζ

- G. C. Rota Foundations of combinatorial theory I Z. Wahrscheinlichkeit theo. Verwandte Geb. Z. (1964)

- W. Lawvere, M. Menni The Hopf algebra of Möbius intervals Theory and Applications of Categories 24 (2010)

- A.A. Karatsuba, S. Voronin The Riemann Zeta Function, Walter de Gruyter 1992

- Théorie des catégories

- T. Leinster Basic category theory, Cambridge 2014

- Logique

- D. Gabbay L. Maksimova Interpolation and definability - modal and intuitionistic logics, Oxford logic guides 2005

- Topologie

- Oxtoby Category and Measure, Springer 1971

- Forcing

- K. Kunen Set theory – An introduction to independence proofs Studies in logic and the foundations of mathematics, 102 (1980) Elsevier

- Axiome de Martin

- M. Fremlin Consequences of Martin's axiom, Cambridge University Press 1984

- S. Todorcevic Partition problems in topology Contemporary Mathematics 84, American Mathematical Society 1989

- S. Todorcevic, B. Velickovic Martin's axiom and partitions, Compositio Mathematica tome 63 n° 3 (1987)

• <u>Autres articles</u>

- Herrlich Strecker Algebra $\cap$ Topology = Compactness, Gen. Topology Appl. 1 (1971)

- A.M. Pitts Amalgamation and interpolation in the category of Heyting algebras, J. Pure Appl. Algebra 29 (1983)