

AFSCET

Res-Systemica

Revue Française de Systémique
Fondée par Evelyne Andreewsky

Volume 25, Rochebrune 2022

Systèmes complexes ; théorie et pratiques

Res-Systemica, volume 25, article 12

Vers une théorie supersymétrique des dynamiques complexes

Paul Bourguine

22 pages



Creative Commons

VERS UNE THÉORIE SUPERSYMMÉTRIQUE DES DYNAMIQUES COMPLEXES

Paul Bourgine

Complex Systems Digital Campus⁶⁴

Résumé

Les systèmes complexes sont omniprésents dans la nature à tous les niveaux d'organisation. La thèse de cet article est que *« ce qu'il est convenu d'appeler 'la phénoménologie d'un système complexe' peut être reconstruite exactement par une 'dynamique complexe' »*. La 'théorie supersymétrique des dynamiques stochastiques' se charge d'opérer cette reconstruction exacte comme *l'addition de sa dynamique moyenne espérée et des fluctuations autour de cette dynamique, l'une et l'autre fonction à chaque instant de toute la phénoménologie passée*. Une « dynamique complexe » est définie comme l'addition d'une dynamique moyenne allant vers le bord du chaos (*signée par une entropie croissante de Kolmogorov-Sinai*) et de fluctuations propres à un état critique autoorganisé (*signé par des lois puissances*). La

⁶⁴ UNESCO UniTwin CS-DC. Le 'Complex Systems Digital Campus' est un réseau d'universités dans 50 pays créant un e-Campus global formé d'équipes interdisciplinaires visant à relever les défis de la modélisation posée par les systèmes complexes.

reconstruction exacte permet de falsifier cette définition d'une 'dynamique complexe' pour mieux en reformuler la définition.

Abstract

Complex systems are ubiquitous in nature at all levels of organization. The thesis of this article is "*what is commonly called 'the phenomenology of a complex system' can be reconstructed exactly by 'complex dynamic'*". The 'supersymmetric theory of stochastic dynamics' is responsible for operating this exact reconstruction as *the addition of its expected mean dynamics and of the fluctuations around this dynamic, one and the other function at each time of all past phenomenology*. A "complex dynamic" is defined as the addition of a mean dynamics going towards the edge of chaos (*signed by an increasing entropy of Kolmogorov-Sinai*) and of fluctuations proper to a self-organized critical state (*signed by power laws*). The exact reconstruction makes it possible to falsify this definition of a 'complex dynamic' to better reformulate it.

Mots clefs : systèmes complexes, thèse, théorie supersymétrique des dynamiques stochastiques, paradigme scientifique exact, intégrale de chemins, phénoménologie, bord du chaos, criticalité autoorganisée, épistémologie formelle.

« *Avec les systèmes complexes, la question n'est plus de prédire ce qui va arriver mais ce qui peut arriver* » - Ilya Prigogine

Introduction

La thèse de cet article a été présentée dans le résumé de l'article et sera à nouveau discutée dans la conclusion.

Une thèse consiste à affirmer qu'un 'concept sémantique intuitif' correspond exactement à une définition formelle dans un système logique ou une théorie mathématique⁶⁵. Une thèse n'est pas démontrable car le concept sémantique n'a pas de définition formelle. Mais la définition formelle est falsifiable comme il est requis lorsqu'il s'agit de science et, en ce cas, modifiable théoriquement par sa communauté scientifique, ici celle de la science des systèmes complexes.

La théorie utilisée est la « théorie supersymétrique des dynamiques stochastiques » comme point de départ d'une de ses branches comme « théorie supersymétrique des dynamiques complexes ». Cette dernière abrite déjà les travaux théoriques d'Ilya Prigogine, de Giorgio Parisi et de toute la communauté de physique statistique et de mathématiciens sur les systèmes complexes sans oublier les contributions théoriques venant de toutes les disciplines expérimentales. Et cette construction théorique n'a de sens que confrontée en retour à tous les travaux

⁶⁵ Une thèse célèbre est celle de Church (1930) : « tout calcul peut se ramener à un lambda-calcul ». Cette thèse s'est ensuite appelée thèse de Church-Turing après l'article de Turing sur le « calculabilité » (1936). Dans les années 1930 d'autres définitions sont apparues comme les fonctions récursives, les machines de Post, les machines à compteurs. Elles ont toutes été prouvées équivalentes.

expérimentaux sur les systèmes complexes qui traversent tous les champs disciplinaires.

1. La théorie supersymétrique des systèmes dynamiques

Le principe de moindre action : il est né au 18^{ème} siècle avec Leibnitz, Maupertuis, Euler et Lagrange. Au 20^{ème} siècle, il a été généralisé par le théorème de Noether et les intégrales de chemins de Feynman. Il ne s'agit pas d'un minimum absolu mais d'un principe extrémal local. C'est aussi ce principe d'extremum local avec les théorèmes d'Hamilton-Jacobi-Bellman et de Pontriaguine qui vaut pour les systèmes relevant de la théorie des jeux face à la Nature ou entre des joueurs.

La thèse suivante reste ainsi valide avec le cas déterministe comme cas particulier du cas stochastique. Elle reste valide jusqu'à aujourd'hui pour *toutes les théories de champs en physique, stochastiques (et donc déterministes comme cas particulier)*.

Principe de moindre action (thèse) : toute phénoménologie stochastique entre un état stochastique A et un état stochastique B peut se modéliser par le principe de moindre action comme extremum local de l'intégrale stochastique de son action représentée son Lagrangien L entre A et B

Les grands théorèmes de Noether en physique ou de Hamilton-Jacobi-Bellman-Pontriaguine en théorie des jeux disent que cet extremum local est réalisé par l'intégrale de chemins⁶⁶ de l'Hamiltonien H dérivée du Lagrangien L .

La théorie supersymétrique des dynamiques stochastiques en mécanique statistique se donne pour but de produire le meilleur modèle d'une phénoménologie quand la théorie du niveau microscopique est connue mais que les états microscopiques ne peuvent pas être mesurés. Elle est basée sur un 'opérateur de projection exact dépendant du temps' dont la définition est la suivante : *en l'absence de toute information sur les états microscopiques, l'opérateur de projection projette la configuration macroscopique observée sur les états microscopiques inconnus, en leur attribuant des valeurs uniformes conformément à un principe de maximum de vraisemblance*⁶⁷ (*principe supersymétrique*). Une synthèse des méthodes de reconstructions exactes au cours des cinq dernières décennies est proposée par Michael te Vrugt et de Raphael

⁶⁶ L'intégrale de chemin est relative aux processus stochastiques et quantiques. Elle fournit la base pour la grande synthèse des années 1970 qui unifie la théorie quantique des champs avec la théorie statistique des champs d'un champ fluctuant auprès d'une transition du second ordre.

⁶⁷ Cette règle est celle de Jaynes en théorie de l'information : en l'absence de toute information, la distribution retenue est l'équiprobabilité.

Wittkowski⁶⁸. Les deux premières décennies ont été consacrés à un hamiltonien et un opérateur de projection indépendant du temps^{69 70 71}, *i.e.* un *phénomène stationnaire avec fluctuations*. Les deux décennies suivantes ont proposé un opérateur de projection dépendant du temps avec un hamiltonien invariant dans le temps. Le cas plus général hamiltoniens dépendant eux-mêmes du temps⁷² est apparu ensuite pour prendre en compte des phénomènes de croissance/décroissance

Théorème(s) de la théorie supersymétrique :

Toute phénoménologie observée avec son Hamiltonien dépendant du temps peut être reconstruite exactement comme dynamique stochastique par l'opérateur de projection dépendant du temps défini ci-dessus : cette reconstruction exacte est la somme d'une trajectoire en moyenne et de ses fluctuations stochastiques autour

⁶⁸ Michael te Vrugt and Raphael Wittkowski: *Projection operators in statistical mechanics: a pedagogical approach* (2019), <https://arxiv.org/abs/2001.01572v1>

⁶⁹ S. Nakajima, "On quantum theory of transport phenomena: steady diffusion", *Progress of Theoretical Physics* 20, 948–959 (1958).

⁷⁰ R. Zwanzig, "Ensemble method in the theory of irreversibility", *Journal of Chemical Physics* 33, 1338–1341 (1960).

⁷¹ H. Mori, "Transport, collective motion, and Brownian motion," *Progress of Theoretical Physics* 33, 423–455(1965).

⁷² H. Grabert, *Projection Operator Techniques in Nonequilibrium Statistical Mechanics, 1st ed., Springer Tracts in Modern Physics, Vol. 95* (Springer, Berlin, 1982).

*de cette moyenne, toutes les deux construites comme une mémoire dynamique de l'histoire de la phénoménologie observée*⁷³.

Il est remarquable que ce même théorème puisse être décliné pour reconstruire les dynamiques thermodynamiques, de transport et de toutes données phénoménologiques. Il est aussi remarquable que la *rétro-prédiction fonctionne exactement de la même manière que la prédiction*⁷⁴. Il faut en effet noter que la prédiction stochastique fonctionne aussi en marche arrière vers un passé inconnu⁷⁵.

Le caractère exact d'un modèle dynamique supersymétrique fournit *de facto* un critère de falsifiabilité de l'Hamiltonien lui-même ou de l'hypothèse sur l'opérateur de projection si la reconstruction de la trajectoire moyenne et de ses fluctuations autour de la moyenne⁷⁶ produit des résultats inattendus ou si des propriétés supplémentaires sont attendues.

⁷³ Les “réseaux neuronaux récurrents” fonctionnent selon le même principe, par exemple celui qui devine les prochaines lettres et corrige les dernières ou, encore, de manière plus spectaculaire développe un sujet comme ChatGPT.

⁷⁴ Par exemple, le procédé a été utilisé à chaque instant pour la prédiction en France du futur de l'épidémie de la 1^{ère} vague de Covid : à chaque instant, le procédé consiste à reconstruire le début mal connu de l'épidémie puis, fort de ces progrès stochastiques sur l'origine de la pandémie, de repartir vers le futur avec une histoire mieux connue en probabilité. Cela n'a pas été fait internationalement !

⁷⁵ Par exemple, pour une épidémie dont on ne connaît pas bien de démarrage spatiotemporel, à chaque nouvelle donnée en marche avant, on peut repartir en arrière pour mieux préciser le démarrage spatiotemporel avant de repartir vers la prédiction des instants futurs.

⁷⁶ Par exemple s'il y a une erreur sur le choix de l'hamiltonien ou des évidences théoriques sur la nature des lois stochastiques.

La théorie supersymétrique des dynamiques stochastiques construit des ‘dynamiques stochastiques’ en fonction du type de réseau selon qu’il est ‘*aléatoire*’, ‘*petit monde*’ ou ‘*invariant d’échelle*’ :

Réseau aléatoire : Ce modèle s’appelle aussi ‘gaz sur réseau’ avec émergence d’une dynamique de ‘fluide au sens large’ avec des phénomènes de transport et de transfert d’énergie libre (e.g. de température). Le réseau est fait de cases occupées ou libres. Chaque nœud se déplace dans sa direction et un choc peut se produire. Cela peut être aussi bien des molécules de différents types y compris des petites avec des grandes en train de se polymériser comme dans une cellule biologique.

Réseau ‘petit monde’ : Ces réseaux émergent avec un diamètre qui reste petit. Cette limite a été mesurée à environ 6 pour des réseaux neuronaux comme pour des réseaux sociaux. Dans les deux cas, cette limite est nécessaire pour obtenir des consensus au sein du réseau, par exemple par un processus de synchronisation⁷⁷. De même dans une conférence scientifique, chaque présentateur crée des synchronies de synchronies neuronales qui valident ou falsifient ses propositions scientifiques. Dans les deux cas, pour qu’une telle synchronisation soit possible, il ne faut pas que le

⁷⁷ Hubel et Wiesel ont obtenu le prix Nobel de biologie pour avoir mis en évidence que deux neurones très éloignés dans le réseau neuronal d’un chat étaient synchronisés.

diamètre du réseau soit trop grand : un ‘petit monde est nécessaire’. Le paradigme théorique est ici le ‘réseau de verre de spins’ dont une *théorie supersymétrique comme théorie du champ moyen* a été proposée par Giorgio Parisi⁷⁸. Cette théorie est *exacte lorsque la taille du réseau croît à l’infini* mais reste une excellente approximation théorique pour des réseaux finis comme les petits mondes.

Réseau invariant d’échelle⁷⁹ : Dans ces réseaux *invariants d’échelle*, le nombre des voisins suit une *loi de puissance*. Ils sont très fréquents dans la nature : le métabolisme cellulaire, le réseau internet, un dictionnaire, l’arbre phylogénétique, le réseau trophique dans un écosystème terrestre ou marin etc...

Ces réseaux présentent dynamiquement une règle d’attachement préférentiel : par exemple, Albert-László Barabási a proposé la ‘*règle de l’attachement préférentiel d’un nouveau nœud à un nœud existant avec une probabilité proportionnelle au nombre de ses liens déjà créés*’⁸⁰.

⁷⁸ Giorgio Parisi a reçu le prix Nobel de physique pour ses travaux sur les verres de spins et d’autres systèmes complexes comme, par exemple, les grands nuages d’oiseaux au-dessus de Rome qui sont aussi un désordre gelé où chacun garde sa place au milieu des autres pendant le vol.

⁷⁹ https://en.wikipedia.org/wiki/Preferential_attachment

⁸⁰ Albert-László Barabási et Réka Albert, *Emergence of scaling in random networks*, Science, 286:509-512,, 15 octobre 1999

2. Vers une théorie supersymétrique des dynamiques complexes

Cette partie commence avec une définition récursive de la phénoménologie d'un système complexe. Cette définition récursive force l'étude de leur causalité ascendante et descendante sur plusieurs niveaux d'organisation qui sont responsables des phénomènes de viabilité et de coévolution internes au système complexe.

Phénoménologie d'un système complexe (propriétés principales) : Au cours de son cycle naissance/vie/disparition, la phénoménologie d'un système complexe est celle de l'émergence spontanée d'un réseau capables de créer de nouveaux nœuds et de nouveaux liens pour maintenir son auto-organisation dans des environnements changeants. Ses nœuds sont récursivement des systèmes complexes avec des causalités ascendantes et descendantes entre les niveaux d'organisation.

1^{er} principe : la causalité descendante et ascendante des « effets tunnels ».

Le grand théorème de Freidlin & Wentzell⁸¹ démontre que « tout système stochastique soumis à un bruit tendant vers 0 parcourt de

⁸¹ Il fait 150 pages in *Freidlin, Mark I.; Wentzell, Alexander D. (1998). Random perturbations of dynamical systems. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences] 260*

façon ‘déterministe’ l’ensemble de ses attracteurs en cycles, hypercycles, hyper-hypercycles ...et ainsi de suite lorsque l’horizon temporel croît vers l’infini⁸². Et plus le bruit tend vers 0 et plus le « saut spontané » est proche du saut minimum entre l’attracteur et sa frontière (e.g. sortie en K_4 de l’attracteur K_2 dans la figure 1d) ».

Les lignes orientées sont les dynamiques déterministes. Avec son non-déterminisme local, la dynamique stochastique fabrique progressivement un *halo en probabilité* (i.e. un attracteur stochastique, non représenté) au voisinage de chaque attracteur déterministe, ici K_2 . *La 1^{ère} fois que le halo rencontre la frontière de l’attracteur, un non-déterminisme global se produit comme brisure de symétrie : le système change de bassin d’attraction (ici K_3) et construit un nouvel attracteur stochastique point par point, dans ce bassin.*

Fig.1d : Le 3^{ème} type d’attracteur appartient à la famille des ‘attracteurs étranges’ qui présentent de larges déviations

(Second ed.). New York: Springer-Verlag. pp. xii+430. ISBN 0-387-98362-7. MR1652127

⁸² Ilya Prigogine parle de cette petite fluctuation thermodynamique dans un coin de l’univers qui a créé la biosphère en 3 milliards d’années. Et les phénomènes co-évolutionnaires de la biosphère ont un horizon temporel non limité.

déterministes à partir de deux points ayant un écart aussi petit que l'on veut. La figure représente le célèbre attracteur de Lorentz⁸³.

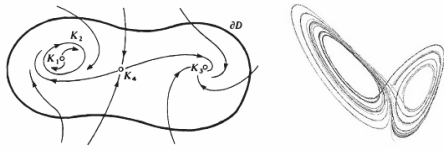


Fig.1 : La figure de gauche met en scène un exemple minimal d'un processus naissance/vie/mort d'un niveau macro : a. la nucléation du système dans l'attracteur initial instable K_1 ; b. son développement avec l'attracteur cyclique K_2 puis c. le saut dans l'attracteur de sénescence K_3 en passant par K_4 d. pour finalement sortir de son domaine de viabilité ∂D .

Quel que soit le saut entre deux attracteurs, ce saut spontané est 'instantané' et son 'coût' (par exemple en énergie libre) est nul à l'échelle macro ! Ce saut spontané provient de cascades descendantes toutes aussi spontanées jusqu'à « l'effet tunnel » au niveau quantique : l'effet tunnel désigne la propriété que possède une onde quantique de franchir une barrière de potentiel même si

⁸³ Il est célèbre parce qu'il est à l'origine de l'effet dit « papillon » avec la théorie des attracteurs chaotiques, « le battement des ailes d'un papillon peut entraîner une modification du climat dans une autre partie du globe ». Notons toutefois que la déviation inverse peut tout aussi bien empêcher un tel changement.

son énergie est très inférieure à l'énergie minimale requise pour franchir cette barrière⁸⁴ (fig.2).

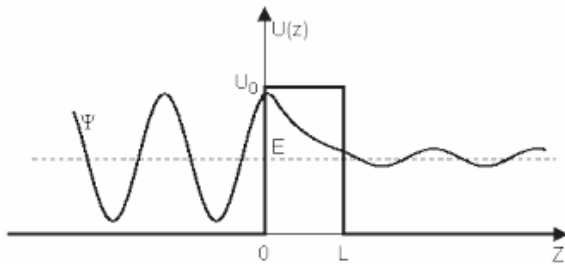


Fig.2 : effet tunnel : l'onde d'énergie E de haute fréquence se transmet à travers la barrière en une onde de plus basse fréquence et d'énergie voisine de celle d'entrée.

En réalité, le saut d'attracteur à tout niveau d'organisation suppose aussi des cascades ascendantes sophistiquées de synchronisation (exacte et/ou avec délais) depuis le niveau quantique jusqu'au niveau macroscopique.

2^{ème} principe phénoménologique : la route vers le bord du chaos

Les cascades descendantes d'effets tunnel et les cascades de synchronisations/coordinations ascendantes avec retard⁸⁵ sont en

⁸⁴ Chacun de nous se déplace, active son réseau neuronal et change 30 milliards de cellules chaque jour avec 2500 kcals soit 100 watts, i.e. l'énergie d'une ampoule. Les autres animaux font de même à la proportionnelle de leur poids, soit, par exemple, $3 \cdot 10^{-3}$ watts pour un insecte.

⁸⁵ La synchronisation est au 1/1000 s dans les assemblées de neurones synchrones. Ce type de synchronie est mis en scène par le modèle de Y. Kuramoto, *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence* (Springer, Berlin, 1984).

réalité le fait de moteurs avec ses mini-moteurs puis ses micromoteurs ...

On peut alors esquisser une démonstration de la route vers le chaos de la façon suivante. La partie déterministe de la dynamique se produit comme dans le théorème de Freidlin et Wentzel lorsque le bruit tend vers 0: à chaque niveau d'organisation, chaque moteur parcourt son cycle d'attracteurs de façon déterministe et, dans son cycle, active les mini-moteurs en hypercycle, puis les micromoteurs en hyperhypercycle, ..., et ceci se reproduit dans un grand nombre de cycles basiques dans la vie du système complexe. Celui-ci trace ainsi *sa propre route vers le bord du chaos tout au long de sa vie (fig.3)*. Cet emboîtement d'hypercycles fractionne le temps dans des intervalles de plus en plus petits. Tout se passe donc comme si le temps devenait très long comme dans le théorème de Freidlin et Wentzel qui met en scène une route à l'extrême bord du chaos pour un temps infini. En conséquence, tout se passe comme si le bord du chaos était toujours plus approché quand le nombre de niveaux d'organisation croît, jusqu'à la biosphère⁸⁶.

⁸⁶ Un article dans Nature a réévalué le nombre d'espèces dans l'écosphère : l'estimation précédente de 100 millions d'espèces a été corrigé en 100 milliards d'espèces.

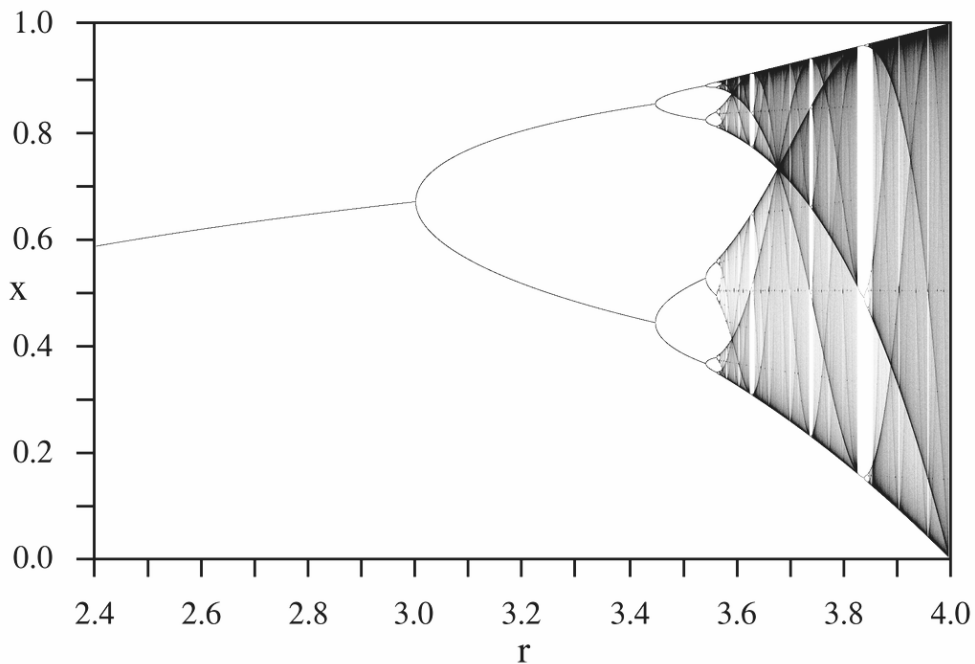


Fig.3 : Mitchell Feigenbaum a proposé cette route vers le bord du chaos par doublement de période qui démarre avec un cycle ($r \approx 3.2$) puis devient un cycle double ... jusqu'à un nombre infini de cycles. Cette figure est la même que celle du théorème de Freidlin et Wentzel. Cette route vers le chaos se reproduit à nouveau pour des valeurs supérieures du paramètre.

3^{ème} principe phénoménologique : la criticalité autoorganisée.

Selon le 2^{ème} principe ci-dessus, le bord du chaos est un attracteur de tout système complexe autoorganisé tout au long de son évolution. Cet attracteur est invariant d'échelle en tant qu'il se produit quel que soit la taille du système. Cette invariance d'échelle est une propriété caractéristique d'un état critique : il

porte le nom « d'état critique autoorganisé ». Comme tout état critique invariant d'échelle, ses lois sont toutes des lois puissances. Le bord du chaos est reconnu comme procurant des capacités à traiter l'information et à mémoriser. Et le franchissement du bord du chaos est synonyme d'oubli catastrophique, d'incapacité à traiter l'information et de non-intégrabilité (cf fig 4.).

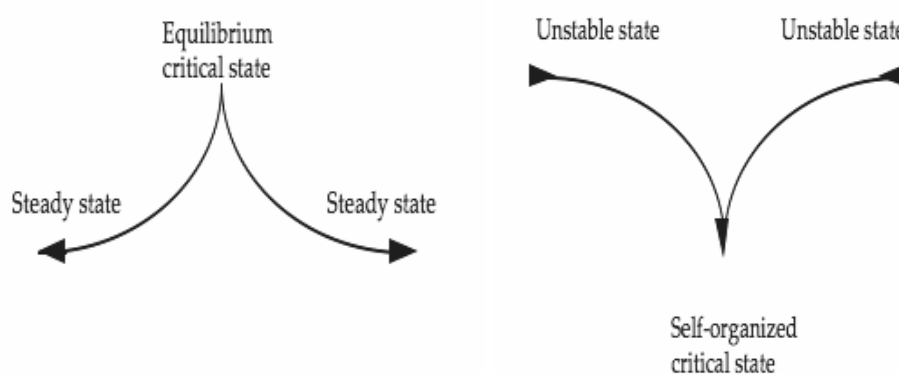


Fig.4 : État critique auto-organisé dont on vient de traiter de la généricité pour les systèmes complexes est un attracteur. *C'est une transition de phase du 2^{ème} ordre. A l'inverse, l'état d'équilibre d'une transition de phases du 1^{er} ordre à une température donnée est instable entre deux phases qui, elles, sont stables.*

Le nouveau paradigme des « états critiques auto-organisés » proposé par Per Bak ⁸⁷ prend ainsi place au cœur de la modélisation des systèmes complexes.

⁸⁷ Par exemple, Per Bak & Stefan Boettcher, 1997: <https://arxiv.org/pdf/cond-mat/9701157.pdf>

L'état critique auto-organisé n'est plus un état instable entre deux phases stables comme c'est le cas dans la plupart des transitions de phases habituelles. L'état critique auto-organisé est bien un attracteur des états dans son voisinage. Mais il est *métastable et d'autant plus métastable qu'il est au bord du chaos comme dans l'exemple du tas de sable(fig.5).*

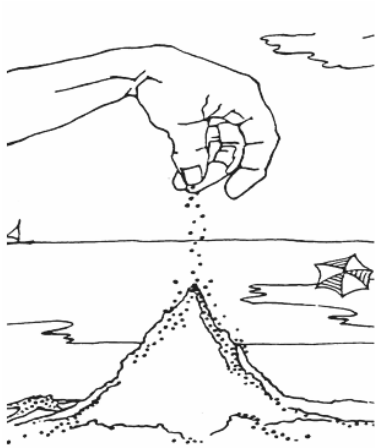


Fig. 5 : Exemple du tas de sable avec sa pente critique (le paramètre de contrôle) et ses avalanches (la pente en chaque point est le paramètre d'ordre : une avalanche ne se produit qu'au-delà de la pente critique)⁸⁸.

⁸⁸ Si l'on considère le tas de sable (fig 3), le paramètre de contrôle est la pente critique. Chaque fois que la pente dépasse cette pente critique, une avalanche (c'est le paramètre dit d'ordre) se déclenche pour remettre l'ensemble des pentes en dessous de la pente critique. Il y a rétroaction du paramètre d'ordre (i.e. l'avalanche) sur le paramètre de contrôle (i.e. la pente). Le tas de sable est métastable autour de son état critique et sa métastabilité est maximale quand sa pente est partout égale à sa pente critique : un seul grain de sable à n'importe

Du fait de la criticalité, les avalanches, leur durées et leurs spectres d'énergie obéissent à des lois puissance⁸⁹. Tout phénomène critique est invariant d'échelle et se modélise grâce à la 'théorie de la renormalisation' des phénomènes critiques : cette théorie démontre que ces lois puissances ont des exposants qui vérifient des *lois d'échelle* invariante quand la dimension de l'espace du même phénomène augmente : les lois d'échelle entre les exposants des lois puissance du tas de sable en 2D sont les mêmes que les tas en 3D, 4D, ..).

La figure de la criticalité auto-organisée peut se résumer par des équilibres stationnaires ponctués par des avalanches co-évolutionnaires en lois puissances.

4^{ème} principe phénoménologique : le bord du chaos dans le diagramme général des phases :

On peut maintenant situer les systèmes complexes dans le diagramme de phase général ci-dessous⁹⁰ : « *T* » est la partie intégrable symétrique, ordonnée comme l'est le cristal. « *C* » est

quel endroit va déclencher de façon immédiate une de ses plus grandes avalanches.

⁸⁹ Tels les feux de forêt, les ouragans, les tempêtes, les tsunamis, les maladies et les épidémies, etc..

⁹⁰ Le diagramme ci-dessous est extrait de l'article anglais de Wikipedia sur la place de la supersymétrie dans la théorie des dynamiques stochastiques. Il est à noter qu'une large place y est faite aux travaux de Giorgio Parisi, le 1^{er} prix Nobel en physique pour l'étude des systèmes complexes.

la partie non intégrable du chaos stochastique comme l'est la fumée. Et « N » est la partie ordonnée au bord du chaos entre le cristal « T » et la fumée « C »⁹¹. « N » est le lieu où se placent les systèmes complexes avec leur route vers le bord du chaos et leur *criticalité auto-organisée* même au voisinage du zéro absolu (selon l'esquisse de la démonstration ci-dessus).

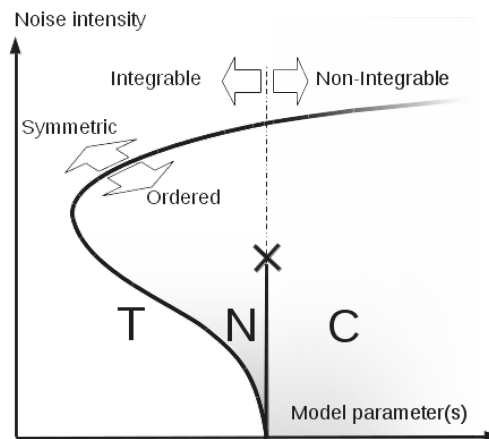


Fig. 6 : By Vasilii Tiorkin - Own work, CC BY-SA 4.0,

Le point de rencontre de ‘N’ avec l’axe horizontal correspond à *un bruit nul, e.g. le zéro absolu en température* : c’est la situation limite qui correspond au grand théorème de Freidlin et Wentzell et aux systèmes complexes. C’est la situation limite au bord du chaos entre le cristal (un ordre parfait) et la fumée (un désordre

⁹¹ La complexité émerge ‘Entre le cristal et la fumée’, selon le beau titre d’un livre d’Henri Atlan.

parfait) où il n'y a qu'un seul bassin d'attraction y compris quand le bruit augmente.

Ces résultats ont des implications immédiates importantes au voisinage du bruit nul (par exemple, la température absolue nulle) : ou bien il n'a qu'un seul bassin d'attraction (c'est le cas du 'cristal' à gauche ou de la 'fumée' à droite dans la phase chaotique). Ou bien le parcours n'est autre qu'une route au bord du chaos et la criticalité auto-organisée. Et le système complexe reste au bord du chaos, au moins tant que le bruit (e.g. la température) n'est pas trop important pour causer sa disparition.

3. Conclusion : définition d'une « dynamique stochastique complexe »

On peut résumer ainsi les propriétés d'une 'dynamique stochastique complexe' ou « dynamique complexe » puisque toute dynamique complexe est stochastique.

***Définition** : une « dynamique complexe » est une dynamique stochastique dont la trajectoire moyenne va vers le bord du chaos (propriété falsifiable mesurée par l'entropie de Kolmogorov-Sinai)*

et les fluctuations sont les lois puissances⁹² (propriété falsifiable) d'une criticalité auto-organisée⁹³.

Thèse : Tout ce que nous appelons phénoménologie d'un système complexe peut se reconstruire exactement comme une dynamique complexe.

La phase N (fig.6) contient clairement les dynamiques des systèmes complexes. Elle embrasse aussi bien la *morphogenèse* de la matière condensée, des tas de sable, des organismes vivants, les écosystèmes ou encore l'*émergence* de l'intelligence individuelle et collective et les territoires intelligents à toutes les échelles jusqu'à l'écosphère. Chacun de ces systèmes est le lieu de toutes sortes d'avalanches comme les feux de forêt, les ouragans, les tempêtes, les tsunamis, les maladies et les épidémies, les news de toutes sortes, etc... Ces avalanches sont de toute taille et de toute durée suivant *une 'loi puissance' signature de tout état critique, ici désigné sous label d'état critique auto-organisé*. Tout phénomène critique est invariant d'échelle et se modélise grâce à

⁹² Tels la turbulence, les avalanches co-évolutionnaires, l'échelle de Richter des tremblements de terre, la formation de patterns, les bruits en 1/f, les feux de forêt .. Et bien d'autres phénomènes de rupture de l'ordre spontané.

⁹³ Tels la turbulence, les avalanches co-évolutionnaires, l'échelle de Richter des tremblements de terre, la formation de patterns, les bruits en 1/f, les feux de forêt .. Et bien d'autres phénomènes de rupture de l'ordre spontané.

la 'théorie de la renormalisation' qui rend compte de ses lois puissances dont les exposants obéissent à des *lois d'échelle*.