ISSN en cours

Revue Internationale de

systémique

Vol. 1, N° 2, 1987

afcet

Dunod

AFSCET

Revue Internationale de systémique

Revue Internationale de Sytémique

volume 01, numéro 2, pages 225 - 237, 1987

La théorie des catastrophes et ses applications

René Thom

Numérisation Afscet, décembre 2015.

Creative Commons

REVUE INTERNATIONALE DE SYSTEMIQUE
Vol. 1, N° 2, pp. 225 à 237

Archives

LA THEORIE DES CATASTROPHES ET SES APPLICATIONS[1]

René THOM

Institut des Hautes Etudes Scientifiques [2]

Résumé

La Théorie des Catastrophes concerne l'étude des morphologies structurellement stables. Après classification des éléments d'un alphabet morphologique, on peut définir la notion de niveau hiérarchique d'organisation. Les niveaux intéressants vont par couples , ce fait est lié à la notion de fonction (au sens biologique ou linguistique). La présence d'éléments est imposée par l'exigence de l'homéostasie de l'entité globale.

De ce point de vue, la notion de système doit être définie par des conditions de stabilité globale. La Théorie des Catastrophes donne un début de réponse : toute morphologie apparaît comme une conséquence de conflits entre des régimes locaux qui cherchent à optimiser leur frontière commune. Mais le problème fondamental de l'intégration générale des dynamiques locales reste posé.

Parce que la Théorie des Catastrophes postule que le continu est l'entité primordiale, elle évite de choisir entre les approches holistique et réductionniste. C'est un de ses intérêts majeurs.

1. Texte d'une conférence publié dans les actes du Colloque «Réflexions sur de nouvelles approches dans l'étude des systèmes», édité par l'ENSTA, 32 bld Victor, F.77015 Paris, pp. 9 à 22.

2. 91440 Bures-sur-Yvette, France.

Abstract

The Catastrophe Theory investigates structurally stable morphologies. Starting with a classification of the elements of a morphological alphabet, it defines the notion of hierarchical organization level. The interesting levels are paired up : this fact is related to the notion of function (in a biological or linguistic sense). The presence of elements is imposed by the requisite homeostasy of the global entity.

From this standpoint, the notion of system must be defined with respect to conditions of global stability. The Catastrophe Theory provides the beginning of an answer : any morphology results from conflicts between local dynamics which try to optimize their common boundary. Yet, the fundamental issue of the general integration of local dynamics remains to be solved. The Catastrophe Theory resting upon on the assumption that the continuum is the primary entity, it avoids a choice between holistic approaches on the one hand and reductionnist approaches on the other. This is one of its major intersts.

J'ai accepté l'invitation de venir parler ici de la théorie des catastrophes, car il est toujours agréable de jouer le rôle de «commis-voyageur» pour ses propres idées. J'ai été frappé par le contenu délibérément optimiste que présentait le préambule de cette conférence. Les organisateurs semblent penser qu'il y a effectivement une théorie des systèmes, qu'il y a une théorie de l'information, qu'on peut en déduire des conséquences qui conduisent à des résultats pratiques. Je ne voudrais pas jouer le rôle toujours un peu fâcheux de l'avocat du diable, mais je voudrais simplement dire qu'à mes yeux la théorie des systèmes, la théorie de l'information et dans une large mesure peut être hélas la morphogénèse ne sont pour l'heure que des vœux pieux.

La situation est assez semblable à ce qui se passe en médecine. En médecine, on tient absolument à offrir des traitements aux gens, même quand on ne connait pas exactement la nature de leur maladie. Sous l'effet d'un besoin social, on crée une théorie même dans une situation de totale ignorance. En théorie des systèmes, en théorie de l'information et peut être également en morphogénèse biologique, nous en sommes à peu près au même point. On crée des théories, on se sert de théories, on se leurre de mots parce que précisément on ne veut pas prendre conscience de l'abîme d'ignorance devant lequel on se trouve et on jongle avec des mots dans l'espoir de se dissimuler cette ignorance.

Je discuterai plus tard de la notion de système : la notion de l'information, elle, me semble à la fois ambigüe et imprécise, en effet, on emploie le mot information fondamentalement dans deux sens tout à fait différents. On l'emploie d'une part dans le sens banal du terme, d'un détail qui vous est utile pour lever une ambiguïté dans notre comportement (pour savoir à quelle heure part l'avion pour Rome, on consulte l'horaire qui donnera l'*information* cherchée) : ceci comporte un caractère anthropomorphique, anthropocentrique évident de la notion d'information. Et il y a d'autre part la notion d'information à la Shannon qui a été quantifiée et objectivée, mais qui repose sur la nécessité d'avoir un fond d'éléments ou d'évements considérés comme équiprobables. Le rapport entre ces deux aspects de la notion d'information ne peut pas, en principe, être établi. De ce fait ce que l'on appelle usuellement la théorie de l'information, reste limité à ce qu'elle a été depuis Shannon, c'est-à-dire une technique de la communication, une espèce de morphologie statistique exprimant le comportement du bruit dans les transmissions physiques.

Le modèle de la théorie des catastrophes

Venons-en maintenant au modèle de la théorie des catastrophes. Je poserai en principe que les seules morphologies susceptibles d'investigation scientifique sont les morphologies structurellement stables, parce que, comme on dit vulgairement, un fait scientifique doit être un fait reproductible. Tant qu'il n'est pas reproductible il n'est pas en lui-même objet de science. (Là est la différence qui sépare par exemple les phénomènes parapsychologiques des phénomènes de psychologie ordinaire ou de psychologie scientifique).

Bien entendu je ne m'oppose pas à la considération de modèles statistiques, mais il faut bien voir que même l'édification d'un modèle statistique repose sur la nécessité d'avoir au départ un fond d'éléments morphologiques structurellement stables. C'est uniquement parce que vous avez un fond d'accidents morphologiques élémentaires structurellement stables que vous serez en mesure d'édifier un modèle statistique (par exemple : les six faces d'un dé, positions d'équilibre obtenues à l'issue d'un jet du dé).

Que faut-il entendre par accident morphologique ? Soit U un domaine de l'espace-temps siège d'un processus physique, de nature par ailleurs quelconque. Soit u un point de U ; u sera dit un point régulier du processus si toute grandeur observable est continue au voisinage de U. Les points réguliers forment un ouvert R dans U. Le complémentaire U-R est dit le «fermé» des points de catastrophe. Si v est un point de catastrophe du processus, il se passe quelque chose

de visible au voisinage de v, qui s'exprimera par la discontinuité d'une grandeur observable.

Une fois que nous avons défini la notion de morphologie par l'ensemble de catastrophe sur un espace substrat, que nous avons isolé par l'expérience, et il y a là bien entendu une restriction très forte car c'est seulement par l'expérience (c'est-à-dire en préparant des états) qu'on peut isoler les morphologies (et les accidents morphologiques) structurellement stables, on peut ensuite essayer de les classifier. Il est fort possible alors, au moins théoriquement et dans une certaine idéalisation, que la morphologie considérée soit à *engendrement fini* (en d'autres termes, si on prend un point de l'ensemble de catastrophe qui est considéré, il y a autour de ce point une petite carte locale dans laquelle la restriction de l'ensemble de catastrophe à cette carte locale peut être donnée par un modèle emprunté à un catalogue fini).

Beaucoup de morphologies empiriques satisfont à cette exigence, au moins en première approximation et il est très important de classifier les éléments de l'alphabet morphologique et ensuite d'essayer de définir ce qu'on peut appeler les niveaux hiérarchiques d'organisation. J'entendais tout à l'heure parler des difficultés fondamentales qu'il y a à définir des niveaux. Je pense en effet qu'il y a là un problème extrêmement difficile et grave, mais qu'une certaine conceptualisation de ces méthodes d'analyse morphologique peut nous offrir une voie d'approche. On dispose au départ, pour définir les accidents morphologiques fondamentaux, de la notion de *stabilité structurelle* de cette morphologie.

On pourra définir les éléments appartenant à un niveau hiérarchique d'organisation plus élevé comme étant des agrégations de champs morphologiques fondamentaux, astreints à ne plus être structurellement stables en eux-mêmes mais pouvant être rendus structurellement stables si certaines conditions portant sur les conditions initiales sont vérifiées.

Un exemple typique est donné par la notion d'être vivant. Il est bien connu qu'on ne peut pas fabriquer un être vivant à partir d'un mélange inanimé (jusqu'à présent on n'y a pas réussi) mais on peut donner une définition empirique de l'être vivant en disant que pour préparer un être vivant il faut se donner des êtres vivants de la même espèce et les laisser prospérer dans un milieu convenable. C'est une définition qui a priori apparaît comme tautologique mais elle ne l'est pas tant que cela, parce que il faut se rendre compte que dans toute science, *un état est défini par son protocole de préparation qui est un texte écrit en langue usuelle,* de manière non formalisée (s'adressant à tout le monde). Par conséquent, dans la définition même des états de toute science,

il y a une part empruntée au langage usuel, à la réalité macroscopique de tous les jours et cette part est fondamentale, il n'est pas question de l'éliminer. On peut bien sûr faire comme Mackey dans sa théorie de la mécanique quantique, on peut définir l'espèce des états de la mécanique quantique comme étant le dual d'une C* - algèbre ou de l'algèbre des opérateurs d'un espace d'Hilbert, c'est très bien d'un point de vue mathématique, mais, si on veut exprimer la portée concrète de la théorie, on sera quand même obligé de revenir à la réalité macroscopique de tous les jours, et, pour cela, on devra définir concrètement ce qu'est un électron, un photon, un méson, etc... Cette exigence de la description macroscopique usuelle figure dans toutes les sciences, et elle est absolument indispensable. C'est de ce point de vue que définir un être vivant comme étant préparé par le fait qu'on met le même être vivant à l'instant initial $t = o$ n'est pas absolument tautologique (on n'appartient plus à la même échelle de phénomène dans les deux cas).

Les niveaux d'organisation : cas des morphologies empiriques

Après avoir essayé de définir un niveau supérieur d'organisation comme un agrégat d'accidents morphologiques élémentaires stables si certaines conditions sur les conditions initiales sont vérifiées, rien n'interdit d'itérer cette procédure et de définir des niveaux hiérarchiques de plus en plus intégrés, de plus en plus grands. Quand on examine ce qui se passe dans les morphologies empiriques qui sont les objets d'études les plus fréquents, d'une part la morphologie linguistique pour les langues usuelles, et d'autre part la morphologie biologique, on est frappé par le fait que dans la plupart des cas les niveaux se présentent par couples. Il y a un couple (i) dont la structure fait appel à des éléments d'ordre (i-1) et le passage de (i-1) à (i-2) est beaucoup moins bien formalisé que le passage de (i-1) à (i) et de même le passage de (i) à (i + 1) est en général moins bien formalisé que le passage de (i) à (i-1). *C'est ce qu'exprime vulgairement la définition selon laquelle un système est un ensemble d'éléments en interaction.* Dans cette formulation un peu vague, on veut simplement dire que très fréquemment dans les morphologies concrètes que nous rencontrons, les niveaux intéressants vont par couples.

Par exemple dans la morphologie linguistique, il y a un niveau élémentaire qui est le niveau du phonème, puis le niveau de la phonétique ou plutôt de la phonologie qui est celui de la syllabe. La décomposition d'une syllabe en phonèmes fait précisément l'objet de la phonologie, et on peut exprimer de manière formelle les règles qui régissent l'association de phonèmes permettant la constitution d'une syllabe. Par exemple dans une syllabe il y a toujours une voyelle qui est la

voyelle de crête, puis des consonnes situées devant ou (et) derrière cette voyelle, puis entre la consonne d'attaque et la voyelle il peut y avoir des semi-consonnes telles que les liquides, etc... On peut énoncer toute une série de restrictions, portant sur la structure phonologique d'une syllabe et dans beaucoup de langues on peut même donner le tableau complet de toutes les constructions possibles de syllabes (c'est fait en général). On a donc là affaire à un niveau parfaitement formalisé, mais quand on passe à un niveau supérieur, c'est-à-dire au niveau du mot – du lexème comme on dit dans le pédantisme des linguites –, la décomposition du mot en syllabes dans beaucoup de langues n'est pas l'objet d'une formalisation très nette (évidemment il y a des langues comme le chinois où en principe tous les mots sont monosyllabiques bien qu'il faille peut-être nuancer cette affirmation). Au contraire la décomposition d'une phrase en mots fait l'objet d'une théorie relativement autonome qui est la syntaxe ou la grammaire et cette théorie conduit à une description formelle relativement précise (description de la grammaire générative par exemple). En linguistique, on a donc deux couples de niveaux assez bien formalisés (syllabes-phonèmes et phrases-mots). On pourrait aller plus loin et essayer de formaliser la structure d'un récit, et sa décomposition en phrases, mais on se heurte tout de suite à un problème qui n'a pas reçu de solution satisfaisante. Il n'y a pas de théorie générale du récit. C'est là un cas particulier supplémentaire de cette règle selon laquelle les niveaux intéressants vont par couples.

Le fait que les niveaux intéressants vont par couples est lié à une notion qui est la notion de fonction, prise non pas au sens mathématique du terme, mais au sens biologique, linguistique et qui fait appel de manière fondamentale à la régulation de l'unité du niveau linguistique le plus grand. Par exemple en morphologie biologique, on peut distinguer un très grand nombre de niveaux : partons par exemple de la molécule, on peut avoir les organisations supramoléculaires, on peut avoir les organelles de la cellule, on peut avoir la cellule, puis les cellules se constituent en tissus, les tissus en organes, les organes constituent les communautés écologiques. Là aussi, il y a des niveaux qui sont mieux organisés que d'autres. Par exemple le niveau de la cellule par rapport aux organelles cytoplasmiques, est un niveau qui est assez bien défini, assez bien formalisé (assez bien parce qu'on est loin d'en avoir une formalisation totale). La différenciation cellulaire par exemple se caractérise souvent par le fait qu'il y a une apparition d'organelles ayant un certain type à l'intérieur même de la cellule différenciée. Cette formalisation fait intervenir des critères d'appartenance de la cellule au niveau d'ordre plus élevé, l'organisme. Par contre la décomposition d'un organisme en organes, surtout chez les animaux, peut

faire l'objet d'une systématisation qui n'est pas absolument dépourvue de validité. Je fais ici allusion à un vieux problème de la biologie, celui de l'organisation générale des animaux. Ce problème a été discuté entre Cuvier et Geoffroy St Hilaire en 1830, à la belle époque où la biologie s'occupait de problèmes réels au lieu de s'occuper d'une «gadgetterie irrelevante» comme elle le fait maintenant. Geoffroy St Hilaire prétendait qu'il y avait un plan général unique de l'organisme animal. Cuvier est venu, lui a dit : «mais non Monsieur, vous déconnez» (en termes très académiques bien entendu), vous nous racontez qu'il y a des tas d'homologies entre tel ou tel organe etc... tout cela est faux, il y a des contre-exemples...». Dans cette affaire, je pense qu'il y a un exemple typique de conflit entre un esprit audacieux et spéculatif et l'esprit «spécialiste, rigoureux et conservateur» et je ne serais pas étonné que dans l'avenir on rende une meilleure justice aux considérations de Geoffroy St Hilaire, même si elles peuvent paraître encore actuellement délirantes. Il me semble évident en tout cas que la constitution des organes de l'organisme animal peut être presque prévue a priori.

Si on trace un tableau, une matrice donc, dont les colonnes seraient ordonnées par la matière et la forme, la matière se subdivisant en ses états solide, liquide et gazeux, et les lignes définies par émission et réception (un organisme vivant émettant et recevant à la fois de la matière et des formes), si on systématise ce métabolisme de la matière et des formes, on peut obtenir un tableau quasi-complet de toutes les grandes fonctions physiologiques de l'organisme animal (fig. 1).

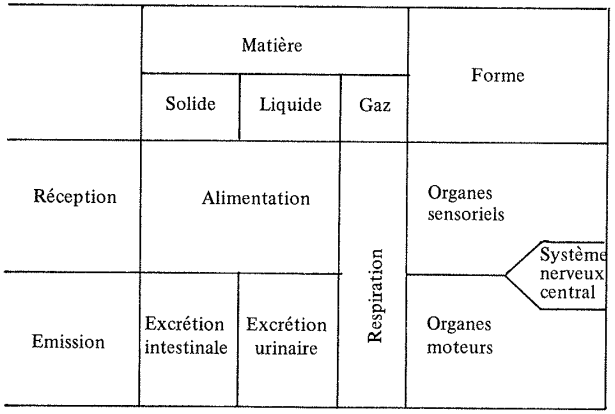

Figure 1

Dans ce cas, on s'aperçoit que c'est l'exigence d'homéostasie, de régulation de l'entité globale qui impose la présence des éléments. Il y a là un principe très général : toutes les fois qu'on a un compte de niveaux susceptibles d'une assez bonne formlaisation de type (i) – (i-1), c'est l'exigence de stabilisation (d'homéostasie) de l'élément d'indice (i) en tant que boule topologique en conflit avec son environnement secondaire dans sa frontière ou à son intérieur, qu'on va considérer comme des éléments du niveau immédiatement inférieur.

La notion de système...

Je me permets ici une considération pour revenir à la *définition saussurienne du système (les éléments ne se définissent que par l'ensemble des interactions qu'ils subissent)*, en remarquant que cette définition n'est pas très bonne. En effet, les interactions ne sont pas arbitraires, elles sont soumises à des contraintes et le rôle de toute théorie structurelle (ou structuraliste) est précisément d'expliciter les contraintes qui pèsent sur ces interactions et, parmi celles-ci, *les plus importantes sont à mon sens les interactions morphologiques,* c'est-à dire les localisations spatio-temporelles relatives des différents éléments. C'est exactement ce qui se passe par exemple en phonétique, en phonologie : quand on étudie la structure d'une syllabe, on la caractérise en tant que concaténation de phonèmes, c'est donc la localisation spatiale ou temporelle des phonèmes qui détermine entièrement la structure algébrique qui définit le système. Il y a là un principe tout à fait général : il faut toujours s'efforcer de définir les structures algébriques qui apparaissent dans ces couples d'éléments relativement bien formalisés, de manière fondamentalement morphologique, de manière spatio-temporelle par une localisation relative de leurs supports. C'est cela, à mon avis, le point essentiel de toute théorie morphologique (de toute théorie systémique qui veut coller à la morphologie).

Dans ce programme qui consiste à essayer de trouver a priori quels sont les éléments d'un ensemble astreint à des conditions de stabilité globale, la théorie des catastrophes peut apporter non pas une réponse (nous en sommes encore loin) mais un début de réponse, car une réponse nécessiterait de toute façon une théorie globale de la régulation qui commence seulement à s'esquisser. Dans sa cybernétique, Norbert Wiener, avait voulu précisément créer une théorie générale des mécanismes de régulation, théorie qui est plus ou moins restée à *l'état de vœu pieux : je ne connais pas un seul théorème de cybernétique*. Le problème de la régulation n'a cessé de hanter la pensée moderne et nous tournons autour de ce problème comme autour d'un sphynx sans jamais parvenir à donner une solution à l'énigme. La

théorie des catastrophes permet à tout le moins un début de réponse, elle permet de classifier parmi les morphologies naturelles celles qui, en quelque sorte, demandent le moins d'hypothèses.

Il y a un problème essentiel dans toute théorie morphologique, c'est de savoir de quoi il faut s'étonner : on est en face d'une morphologie empirique, on voit des choses et on se demande si ce qu'on voit est étonnant ou non. La théorie des catastrophes offre une première tentative de réponse à cette question, elle permet de caractériser ceux des accidents morphologiques qui sont les plus banals, les plus faciles à identifier et à interpréter. Ces derniers sont associés à la théorie des catastrophes élémentaires et sont des accidents engendrés par les conflits de régimes sur un espace substrat. Quand un espace substrat est le siège d'un processus dynamique, on peut considérer que, là où le point est régulier (là où il y a un équilibre local et on se rapproche des idées de Monsieur Prigogine), l'équilibre local est associé à un maximum d'une fonction locale qu'on pourrait appeler une «entropie» locale (qui n'est pas nécessairement l'entropie thermodynamique ; pour moi l'intérêt des notions thermodynamiques d'énergie et d'entropie est qu'on peut dans une large mesure les localiser et les particulariser à des situations spéciales où elles cessent d'être définies en tant que telles) et on pourrait étudier comment ces maxima luttent entre eux pour établir leur frontière. Toute morphologie apparait dans ces modèles comme due aux conflits entre des régimes locaux qui cherchent à optimiser leur frontière commune.

Cette théorie peut être construite sur un plan mathématique rigoureux dans le cas où les dynamiques locales sont des dynamiques de gradient par rapport à un espace ayant une métrique Riemannienne fixe (espace des variables internes ou variables d'états). Dans ce cas on peut en effet classifier les accidents morphologiques correspondants, de manière parfaitement rigoureuse. Il est clair que l'hypothèse d'avoir des gradients locaux est extrêmement restrictive et qu'il faut considérer les autres cas également. En particulier, dans un système de cinétique chimique qui est un système ouvert, on peut avoir des attracteurs qui sont des cycles locaux, périodiques et par conséquent, il est fort possible que l'état local soit caractérisé par autre chose qu'un point attractif du système dynamique correspondant. Cela conduit à faire une étude systématique de la bifurcation entre attracteurs. Les états locaux d'un système dynamique sont en général définis par des attracteurs, c'est-à-dire des sous-ensembles invariants qui ont la propriété d'attirer toutes les trajectoires qui tendent vers lui ; beaucoup de ces attracteurs sont structurellement stables et on peut s'efforcer de les classifier et de classifier la manière dont ils peuvent se transformer l'un dans l'autre par une espèce de relation de topologie interne du système. Il est évident que si on veut le

faire, il y a des restrictions portant sur la nature des frontières entre les régions où dominent ces différents attracteurs et c'est cette étude qui est à proprement parler l'objet de la théorie des catastrophes.

Modes d'application de la théorie des catastrophes

La théorie des catastrophes peut être employée de deux manières tout à fait différentes. *On peut l'employer de manière parfaitement orthodoxe, d'un point de vue scientifique* : on part d'un système dont l'évolution est régie par des lois physiques, on écrit ces lois physiques, on est conduit à des systèmes d'équations aux dérivées partielles dont les solutions vont en général avoir des singularités (dès qu'un système d'équation aux dérivées partielles n'est pas linéaire, il faut s'attendre même s'il n'est que quasi-linéaire, à voir apparaître des zones de choc et des discontinuités dans les solutions). La théorie des catastrophes permet d'affirmer, et toute une théorie analytique s'ébauche dans cette direction, que pour presque toute donnée initiale, toute condition aux abords, la solution sera régulière par morceaux et l'ensemble singulier des sauts entre parties régulières ne présentera qu'un nombre fini d'accidents morphologiques locaux bien définis. Pour donner un exemple simple en ce qui concerne le problème de Plateau dans l'espace à trois dimensions (la théorie des bulles de savon) et, à la suite des travaux de la mathématicienne américaine Jean Taylor, on peut affirmer quon connaît la nature de toutes (ou presque toutes) les singularités des bulles de savon. Autrement dit, étant donné un circuit métallique plongé dans une solution savonneuse, une fois ressorti, le système évolue vers un état d'équilibre qui pourra présenter des singularités. La théorie permet d'affirmer que ces singularités sont de tel ou tel type, il ne peut y avoir «au pire» que des arêtes triples, qui dans une évolution au cours du temps ne pourront passer que par des points quadruples «au maximum» (ou alors la bulle éclatera et l'accident sera total). Ceci est un exemple typique d'une situation où, par l'examen mathématique d'un système d'équations aux dérivées partielles, on est capable d'expliciter la nature des singularités génériques des solutions.

L'intérêt de ce genre de considérations est que le champ d'application du théorème est infiniment plus vaste que celui que les théories linéaires traditionnelles permettent d'obtenir. Ces méthodes consistent à plonger dans l'espace entier dans un grand «fourbi» où on fabrique des êtres de plus en plus fantômatiques (des distributions, des hyper-distributions, des espaces L, des espaces L^x, etc..) et quand on a généralisé son espace, on démontre immédiatement que le problème a une solution, mais cette solution est faible ; et on s'empresse de montrer que pour presque toute donnée initiale, la solution faible est une «bonne» solution (qui n'a pas de singularités ou dont les singularités sont analytiques, ont telle ou telle propriété). Ce type d'analyse peut être effectuée à l'aide de méthodes inspirées de la théorie des catastrophes, même dans des situations non linéaires où la théorie des distributions échoue. Même encore, on en viendra bientôt à concevoir qu'en général, quand il s'agit d'un problème concret, il est ridicule de penser que la situation peut être donnée par un système d'équations aux dérivées partielles unique ; en général il y aura des parties régulières où la solution vérifiera ces équations et il y aura des lieux singuliers où le système ne sera plus vérifié mais où un autre système le sera ; et il y aura des singularités de singularités où un troisième système, encore plus faible, sera vérifié, etc... De sorte que la situation concrète n'est pas régie par un système d'équations aux dérivées partielles unique, mais par toute une hiérarchie de tels systèmes associés chacun à un certain type de singularités de la solution. Ces notions ne sont pas encore très répandues dans les livres, car les gens aiment bien calculer et les vendeurs de «computers» ne sont pas prêts à accepter immédiatement de telles idées, mais il faut bien se rendre compte que dans l'immense majorité des cas, les choses se passent ainsi. Voilà donc pour l'aspect scientifique rigoureux de la théorie des catastrophes. On peut être amené à modifier la théorie des catastrophes élémentaires et à construire des catastrophes plus raffinées, c'est évident. Par exemple, dans la théorie des changements de phase, la solidification, la croissance des cristaux, on a affaire à des singularités dont la nature est assez différente de celle des singularités élémentaires. Cela est dû au fait qu'il faut tenir compte des considérations de symétrie et alors les singularités des ensembles-frontière, des ensembles de catastrophes, changent de nature et deviennent plus compliquées. Il y a là une généralisation de la théorie qu'on commence à étudier actuellement.

En ce qui concerne les utilisations métaphysiques de la théorie des catastrophes ; elles consistent à considérer une morphologie naturelle ou expérimentale et à essayer d'engendrer l'accident dans cette morphologie (et que l'on ne comprend pas) par la dynamique locale la plus simple possible. Ayant constitué le corpus des expériences, des morphologies empiriques, ayant associé à chaque expérience un ensemble de catastrophes, on recouvre cet ensemble de catastrophes de dynamiques locales qui engendrent ces ensembles globaux et on essaie d'intégrer toutes ces dynamiques locales en une dynamique globale unique. Il y a là un problème immense, actuellement hors de portée de la théorie des catastrophes : celui de l'intégration. Dans la théorie des catastrophes élémentaires, il y a un moyen d'intégrer, d'ailleurs tout à fait différent de l'itération algébrique, qui consiste à

passer à une singularité de codimension supérieure et à sectionner par un R plongé dans le déploiement d'une singularité plus grande. C'est un moyen qui n'est pas absolument satisfaisant car il a une portée très limitée. Ce problème de l'intégration générale des dynamiques locales est un problème tout à fait ouvert, sur lequel il faut travailler à la fois empiriquement et mathématiquement. De ce point de vue, la biologie ouvre des perspectives immenses à une meilleure compréhension de l'intégration des dynamiques locales.

Revenons à la *définition des systèmes* que j'ai critiqué au début (système - ensemble d'éléments en interaction) : il s'agit alors d'expliquer les contraintes, les propriétés formelles et structurales des interactions. Il y a deux moyens : *on peut en faire l'explication dans un esprit réductionniste, c'est-à-dire passer à l'échelon d'organisation inférieur, considérer les éléments comme des systèmes composés eux-mêmes d'éléments appartenant à un niveau hiérarchique inférieur et en imposant des contraintes à la combinatoire de ces éléments plus petits, reconstituer les contraintes portant sur les éléments initiaux.* L'autre approche philosophiquement opposée, est l'approche *holistique* qui consiste à *considérer que les éléments constituent un système et que les interactions constatées entre ces différents éléments doivent être telles qu'elles maintiennent l'existence d'un système stable (l'exigence de stabilité du système à l'échelle globale crée des contraintes portant sur les interactions entre éléments).* L'exigence holistique qui rejoint – philosophiquement parlant – l'exigence finaliste, présente de grandes difficultés. Elle exige une certaine algébrisation de la structure du système total de manière à pouvoir, par une exigence de stabilité globale, écrire des conditions portant sur les interactions, chose qu'on ne peut pas toujours faire.

Néanmoins, on peut considérer que toute la démarche épistémologique contemporaine s'est souvent trouvée enserrée dans ce dilemme qu'est le choix entre une approche holistique et une approche réductionniste, l'une imposant de considérer le niveau hiérarchiquement supérieur, l'autre de considérer le niveau inférieur.

La théorie des catastrophes, du seul fait qu'elle postule que le continu est l'entité primordiale, échappe dans une large mesure à ce dilemme. En effet, *pour tout système différentiel régulier, on peut considérer ses solutions, aussi bien comme imposées par un déterminisme local, donc par des considérations de type réductionniste, que par un principe d'optimalité de caractère global.* Le paradigme déterministe type, qui est celui de la dynamique classique, peut s'expliquer aussi bien en termes d'un déterminisme local que d'une optimalité globale (comme le principe de moindre action de Maupertuis).

C'est là l'avantage énorme de l'approche continue par rapport aux

approches discrètes ou ensemblistes, qui ne pourront jamais résoudre cette antinomie entre l'approche réductionniste, et l'approche holistique. L'approche continue, au moins théoriquement, le permet (c'est en tout cas concevable, bien qu'on ne dispose pas à ce jour des outils théoriques nécessaires). C'est là sans doute un des intérêts majeurs de la théorie des catastrophes.

Bibliographie

C. Bruter, *Topologie et Perception*, I-Maloine Ed. Paris.

M. Golubitsky, V. Guillemin, *Stable mappings and their singularities*, Springer, N.Y., 1974.

F. Pham, *Introduction à l'étude topologique des singularités de Landau*, Mémorial Sc. Math., Gauthier-Villars, 1967.

R. Thom, *Modèles mathématiques de la Morphogénèse*, 10.18 no 887 Paris, 1974.

R. Thom, *Stabilité structurelle et Morphogénèse*, Ediscience Paris, Benjamin, Reading, Mass. 1972.

C.E. Zeeman, *Catastrophe theory in brain modelling*, intern. Journal Neuro-science, 6, 1973.