

Revue Internationale de

ISSN 0980-1472

systemique

Vol. 3, N° 2, 1989

afcet

Dunod

AFSCET

Revue Internationale de
systemique

Revue
Internationale
de Sytémique

volume 03, numéro 2, pages 129 - 157, 1989

Dynamique et thermodynamique des systèmes
composés de plusieurs niveaux d'organisation

Pierre Auger

[Numérisation Afscet, décembre 2015.](#)



**DYNAMIQUE ET THERMODYNAMIQUE DES SYSTÈMES
COMPOSÉS DE PLUSIEURS NIVEAUX D'ORGANISATION**

Pierre AUGER

Faculté de Pharmacie de Dijon ¹

Résumé

Nous présentons un modèle de système comportant plusieurs niveaux d'organisation. Nous étudions les aspects dynamiques en donnant des méthodes de passage d'un niveau microscopique à un niveau plus macroscopique. Nous étudions également les couplages entre niveaux d'organisation. Nous étudions des systèmes linéaires et non linéaires avec ou non diffusion spatiale. Nous traitons des systèmes à deux puis trois niveaux. Enfin, nous présentons une approche thermodynamique et nous montrons que l'entropie d'un système hiérarchisé est la somme d'entropies relatives à chacun des niveaux.

Abstract

We present a model of multi-level systems. We study dynamical aspects, particularly the jumping from a microscopic level towards a more macroscopic level and the interactions between the different levels of organization. We study linear and non linear systems with spatial diffusion. Two as well as three level systems are treated. We also study thermodynamical aspects and we show that the entropy of a hierarchically organized system with several levels is the sum of entropies relative to each of these levels. This allows vertical exchanges of entropy between the levels.

Introduction

De nombreux auteurs ont remarqué l'organisation en niveaux hiérarchiques de nombreux systèmes complexes appartenant à des domaines très différents allant de la physique, la chimie, la biologie, l'écologie à l'économie. Nous indiquons quelques références. TF. H. Allen

1. Laboratoire de Biophysique, 7 boulevard Jeanne d'Arc, 21000 DIJON, France.

et coll. étudient les hiérarchies en écologie ^[1], P. Delattre indique l'importance des niveaux d'organisation en Biologie ^[16], A. C. Ehresmann et coll. étudient les systèmes hiérarchisés évolutifs ^[19], W. Findensein et coll. travaillent sur la hiérarchie en théorie du contrôle ^[20], D. Martellato ^[24] ainsi que M. D. Mesarovic et coll. ^[25-26] s'intéressent aux systèmes hiérarchisés en économie. P. Erdi ^[18], R. Rosen ^[28] et B. H. Voorhees ^[32] travaillent sur les systèmes hiérarchisés en neurologie. H. H. Pattee ^[27], H. A. Simon ^[30], G. Toulouse et coll. ^[31], P. Weiss ^[33-34] et L. L. Whyte et coll. ^[35] ont proposé des modèles généraux et soulignent l'importance des systèmes hiérarchisés dans divers domaines. Enfin, nous avons proposé divers modèles de systèmes hiérarchisés et différentes applications en particulier en biologie et en économie ^[2-13].

Habituellement, on distingue les niveaux d'organisation suivants, atomes, molécules, macromolécules, organites, cellules, organismes, populations, écosystèmes. En économie, on peut distinguer les approches micro-économiques et macroéconomiques qui correspondent au passage du niveau d'une entreprise à celui d'une économie régionale ou nationale. F. Jacob parle de poupées russes pour évoquer ces différents niveaux imbriqués les uns dans les autres ^[22].

Le système hiérarchisé est composé d'unités élémentaires au niveau le plus microscopique. Le passage d'un niveau plus microscopique à un niveau plus macroscopique se fait par groupement d'unités formant des nouvelles entités au niveau plus macroscopique ou juste supérieur. Ainsi, les molécules sont des groupes d'atomes, les macromolécules des groupes de molécules, les organites des assemblages de macromolécules, les cellules contiennent de nombreux organites, les organes sont des groupes de cellules, les organismes sont des groupes d'organes, les écosystèmes sont des ensembles d'espèces en interaction. En économie, les systèmes économiques sont des ensembles d'entreprises.

On peut donc décrire un système hiérarchisé par un ensemble d'unités élémentaires ou éléments formant des groupes, eux-mêmes rassemblés en groupes de groupes et ainsi de suite. Chacun de ces niveaux correspond à des échelles d'espace, de temps et d'énergie différentes. Les niveaux plus microscopiques correspondent à des échelles d'espace plus petites, à des échelles de temps plus courtes et à des échelles d'énergie plus grandes. Les éléments ont des tailles plus petites que les groupes auxquels ils appartiennent, les phénomènes concernant l'évolution des groupes sont plus lents que ceux concernant les éléments et les énergies d'interaction entre éléments sont plus grandes que les énergies d'interaction entre groupes.

Dans la première partie, nous présentons les aspects dynamiques d'un système hiérarchisé comportant deux niveaux. Il s'agit d'un ensemble hiérarchisé en quelque sorte idéal avec une séparation bien nette entre les niveaux. Les ordres de grandeur des transformations des éléments à l'intérieur des groupes et entre groupes sont supposés très différents. Nous présentons une méthode de passage d'un niveau à l'autre et nous étudions plus particulièrement les interactions entre niveaux qui peuvent être de deux types, action d'un niveau inférieur sur un niveau supérieur ou l'inverse. Nous étudions le cas d'équations linéaires et non linéaires avec ou sans diffusion spatiale.

Dans la deuxième partie, nous étudions les aspects dynamiques d'un système comportant trois niveaux d'organisation.

Dans la troisième partie, nous étudions les aspects thermodynamiques d'un système hiérarchisé comportant deux niveaux. Nous montrons que l'entropie du système hiérarchisé est la somme d'entropies relatives à chacun des niveaux, ce qui permet des échanges verticaux d'entropie entre les différents niveaux.

Enfin, dans la quatrième partie, nous présentons un exemple en écologie.

1. Système comportant deux niveaux d'organisation

1.1 Présentation d'un système à deux niveaux

Soit Σ un système comportant un très grand nombre d'éléments N_{Σ} . Ces éléments peuvent occuper différents états. De plus, ces états sont eux-mêmes rassemblés en groupes d'états notés α avec $\alpha \in [1, A]$. A est le nombre de groupes d'états. Chaque groupe d'états α contient N^{α} états différents. i_{α} est un indice correspondant aux différents états dans le groupe d'états α , $i_{\alpha} \in [1, N^{\alpha}]$. Le nombre total d'états du système est N et est donné par l'équation (1) :

$$N = \sum_{\alpha} N^{\alpha} \quad (1)$$

La figure 1 présente un système comportant deux niveaux avec des éléments à l'intérieur des N^{α} états appartenant aux A groupes d'états α du

système entier Σ . Les variables choisies sont les nombres d'éléments dans le i_α ème état du groupe α à l'instant t . Soient $n_{i_\alpha}^\alpha(t)$ ces nombres. Par simplicité de notation, nous noterons $n_i^\alpha(t)$ au lieu de $n_{i_\alpha}^\alpha(t)$. Nous supprimons l'indice α de i_α car il n'y a pas d'ambiguïté sur l'appartenance au groupe. Dans la suite du texte, nous utilisons un indice supérieur pour le groupe et un indice inférieur pour l'état. Choisissons des équations différentielles gouvernant la variation dans le temps des variables $n_i^\alpha(t)$ sous une forme assez générale :

$$\dot{n}_i^\alpha = \frac{dn_i^\alpha}{dt} = f_i^\alpha(n^1, n^2, \dots, n^i, \dots, n^A), \quad (2)$$

$n^\alpha(t) = (n_1^\alpha(t), n_2^\alpha(t), \dots, n_i^\alpha(t), \dots, n_N^\alpha(t))$ sont des vecteurs population pour chaque groupe α et f_i^α sont des fonctions de ces vecteurs n^β .

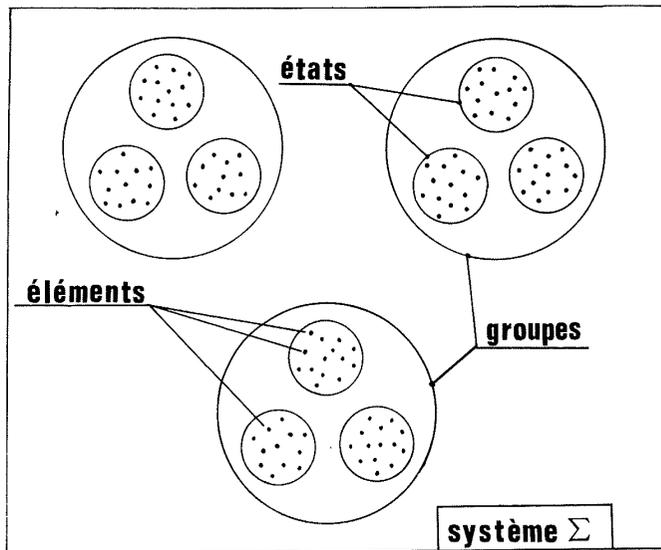


Figure 1. Schéma d'un système hiérarchisé comportant deux niveaux d'organisation

1.2 Etude du cas linéaire

a) Transformations intra-groupes et inter-groupes

Dans le cas linéaire, les équations (2) s'écrivent sous la forme suivante :

$$\dot{n}_i^\alpha = e_i^\alpha + \sum_{\beta=1}^A \sum_{j=1}^{N^\beta} a_{ij}^{\alpha\beta} n_j^\beta, \quad (3)$$

Les paramètres $a_{ij}^{\alpha\beta}$ peuvent s'interpréter comme des taux de transformation des éléments, de l'état j du groupe β vers l'état i du groupe α . Le formalisme que nous utilisons est très proche du formalisme utilisé par P. Delattre [15-16] dans sa théorie des systèmes de transformations. α et β peuvent correspondre au même groupe ou bien à des groupes différents. Dans ces conditions, deux types de transformations peuvent être considérées, des transformations à l'intérieur du même groupe α , c'est-à-dire des transformations *intra-groupes* et des transformations entre groupes différents α et β , c'est-à-dire des transformations *inter-groupes*. Soit a_{ij}^α le taux de transition de l'état j vers l'état i du groupe α , c'est-à-dire que pendant l'intervalle de temps dt autour de l'instant t , $a_{ij}^\alpha n_j^\alpha(t).dt$ éléments quittent l'état j et atteignent l'état i . Les paramètres a_{ij}^α définissent A matrices *intra-groupes* $A^\alpha = \begin{bmatrix} a_{11}^\alpha \\ a_{21}^\alpha \\ \dots \\ a_{i1}^\alpha \end{bmatrix}$

Soit $a_{ij}^{\alpha\beta}$ le taux de transition de l'état j du groupe β vers l'état i d'un autre groupe α , c'est-à-dire que pendant l'intervalle de temps dt autour de l'instant t , $a_{ik}^{\alpha\beta} n_k^\beta(t).dt$ éléments atteignent l'état i du groupe α et quittent l'état k du groupe β . Soient $A^{\alpha\beta}$ des matrices *inter-groupes* définies par $A^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} a_{1j}^{\alpha\beta} \\ a_{2j}^{\alpha\beta} \\ \dots \\ a_{ij}^{\alpha\beta} \end{bmatrix}$. Les matrices A^α ne concernent que les transformations intra-groupes alors que les matrices $A^{\alpha\beta}$ ne concernent que les transformations inter-groupes. En conséquence, lorsqu'il y a conservation des éléments par les transformations, il existe des matrices $A^{\beta\beta}$ qui ne doivent pas être confondues avec les matrices A^β . En effet, soit la transition suivante (j dans $\beta \rightarrow i$ dans α), lorsque $a_{ij}^{\alpha\beta} n_j^\beta(t).dt$ éléments atteignent l'état i du groupe α pendant l'intervalle de temps dt , dans le même temps, $a_{ij}^{\alpha\beta} n_j^\beta(t).dt$ quittent l'état j du groupe β . Cette dernière contribution correspond à une transfor-

mation inter-groupes et doit donc être prise en compte dans une matrice $A^{\beta\beta}$ et non pas dans une matrice A^β . Ces matrices inter-groupes $A^{\beta\beta}$ sont des matrices diagonales d'éléments $a_{jj}^{\beta\beta}$ tels que :

$$a_{jj}^{\beta\beta} = - \sum_{\alpha \neq \beta} \sum_i a_{ij}^{\alpha\beta} \quad (4)$$

Dans ces conditions, nous avons des matrices intra-groupes A^α et deux sortes de matrices inter-groupes $A^{\alpha\beta}$, $\alpha \neq \beta$, et des matrices $A^{\beta\beta}$. e_i^α est le taux d'échange des éléments dans l'état i du groupe α avec le milieu extérieur à Σ , entrée dans Σ si $e_i^\alpha > 0$, sortie de Σ si $e_i^\alpha < 0$. Nous définissons des vecteurs échange avec l'extérieur pour chaque groupe α par

$$e^\alpha = (e_1^\alpha, e_2^\alpha, \dots, e_{N^\alpha}^\alpha).$$

En conséquence, les équations (3) peuvent être réécrites de la manière suivante :

$$\dot{n}_i^\alpha = e_i^\alpha + \sum_j a_{ij}^{\alpha\alpha} n_j^\alpha + \sum_{\beta} \sum_k a_{ik}^{\alpha\beta} n_k^\beta \quad (5)$$

Dans (5), β peut être égal à α ce qui correspond aux matrices $A^{\beta\beta}$. La figure 2 représente un exemple de graphe de transitions dans un système à deux niveaux. En utilisant les matrices A^α et $A^{\alpha\beta}$, l'équation (5) peut être réécrite comme suit :

$$\dot{n}^\alpha = A^\alpha n^\alpha + \sum_{\beta} A^{\alpha\beta} n^\beta + e^\alpha \quad (6)$$

Soit n un vecteur population pour le système Σ tout entier :

$$n = (n^1, n^2, \dots, n^A) \quad (7)$$

On peut réécrire encore plus simplement l'équation (6) :

$$\dot{n} = An + e, \quad (8)$$

avec $e = (e^1, e^2, \dots, e^A)$.

A est la matrice de transition pour le système Σ dans son ensemble et

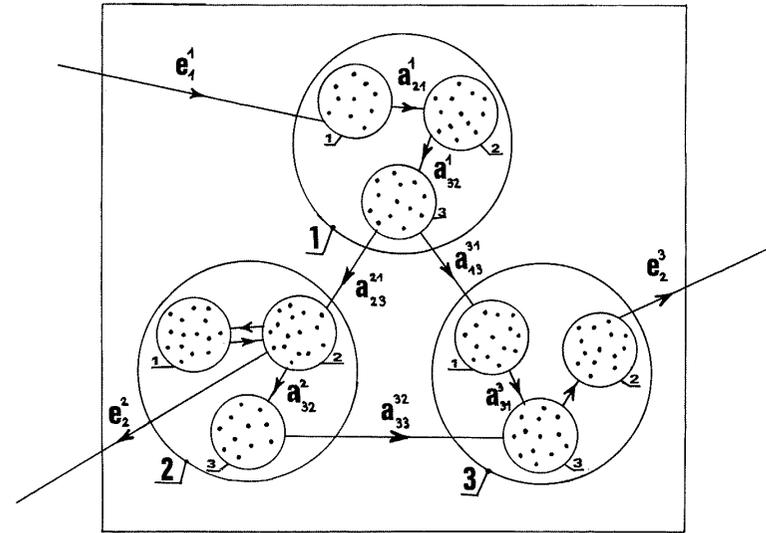


Figure 2. Graphe de transition dans un système hiérarchisé comportant deux niveaux d'organisation.

est une mosaïque des précédentes matrices A^α et $A^{\alpha\beta}$ comme suit :

$$A = \begin{pmatrix} A^1 + A^{11} & A^{12} & & A^{1A} \\ A^{21} & A^2 + A^{22} & & \\ & & & \\ A^{A1} & & & A^A + A^{AA} \end{pmatrix} \quad (9)$$

b) Les hypothèses de hiérarchie

Deux conditions sont nécessaires pour définir un système hiérarchisé. En ce qui concerne la première, il faut que le regroupement des états en groupes d'états ait été effectué pour rendre compte d'une hiérarchie dans les transformations des éléments. Ainsi, nous supposons que les transformations *intra-groupes* sont beaucoup plus fréquentes que les transformations *inter-groupes*, c'est-à-dire que pour tout couple (α, β) et pour tous états (i, j, k, l) nous supposons que :

$$\left| a_{ij}^{\alpha\beta} \right| \gg \left| a_{kl}^{\alpha\beta} \right| \text{ et } \left| e_i^\alpha \right| \quad (10)$$

Les éléments des matrices intra-groupes A^α sont très grands par rapport aux éléments des matrices inter-groupes $A^{\alpha\beta}$ ainsi que devant les taux d'échanges avec le milieu extérieur.

Une deuxième condition est nécessaire afin de définir un système hiérarchisé. Il faut que les groupes isolés présentent des *trajectoires convergentes autour d'au moins un point singulier*. Ceci signifie que pour chaque groupe isolé, nous demandons au moins *un point stationnaire stable* (cas où toutes les valeurs propres des matrices intra-groupes A^α sont différentes réelles et négatives), ou *un cycle limite stable*, ou *une spirale convergente*, ou *des centres*, ou bien encore toute autre trajectoire périodique autour de ce point stationnaire. En conséquence, nous demandons que pour chaque groupe isolé, il existe au moins autour d'un point singulier une trajectoire cyclique ou un point d'équilibre. En négligeant les matrices inter-groupes et les échanges avec l'extérieur, les équations (6) peuvent être approximées par (11) :

$$\dot{\mathbf{n}}^\alpha \equiv A^\alpha \mathbf{n}^\alpha, \quad (11)$$

$$\text{ou encore } \dot{n}_i^\alpha \equiv \sum_j a_{ij}^\alpha n_j^\alpha.$$

Dans le cas où l'équation (11) est vraie, les groupes sont totalement indépendants les uns des autres, il n'y a que des transitions à l'intérieur des groupes et la matrice A se réduit à :

$$A \equiv \begin{pmatrix} A^1 & 0 & 0 \\ 0 & A^2 & \\ & & 0 \\ 0 & 0 & A^A \end{pmatrix} \quad (12)$$

Ce cas limite d'indépendance des groupes n'est pas très intéressant et nous allons maintenant étudier le cas pour lequel les transitions intra-groupes sont très fréquentes par rapport aux transitions inter-groupes qui ne sont pas pour autant totalement négligeables. Les groupes d'états sont faiblement couplés et c'est ce cas que nous appelons celui d'un système hiérarchisé à deux niveaux.

c) Hiérarchie temporelle

Soit $n^\alpha(t)$ le nombre d'éléments dans le groupe α à l'instant t :

$$n^\alpha(t) = \sum_i n_i^\alpha(t). \quad (13)$$

$n^\alpha(t)$ sont les variables de groupe. Dérivons l'équation (13) par rapport au temps et remplaçons \dot{n}_i^α par son expression (5), il vient :

$$\dot{n}^\alpha = \sum_i e_i^\alpha + \sum_i \sum_j a_{ij}^\alpha n_j^\alpha + \sum_\beta \sum_i \sum_k a_{ik}^{\alpha\beta} n_k^\beta. \quad (14)$$

Lorsqu'il y a conservation des éléments par les transitions, il y a autant d'éléments quittant l'état de départ que d'éléments atteignant l'état d'arrivée. De ce fait, si l'on somme sur tous les états de départ et d'arrivée des transitions intra-groupes d'un groupe α , on obtient une relation supplémentaire (15) :

$$\sum_i \sum_j a_{ij}^\alpha n_j^\alpha = 0. \quad (15)$$

Ce cas de conservation des éléments est assez fréquent, en particulier il sera vrai dans les exemples que nous aborderons par la suite. Pour cette raison, nous admettrons la relation (15) et en conséquence l'équation (14) devient :

$$\dot{n}^\alpha = \sum_i e_i^\alpha + \sum_\beta \sum_i \sum_k a_{ik}^{\alpha\beta} n_k^\beta. \quad (16)$$

La comparaison entre les équations (11) et (16) montre que les variables $n_i^\alpha(t)$ sont essentiellement gouvernées par les matrices intra-groupes, voir (11), alors que les variables de groupe $n^\alpha(t)$ sont gouvernées par les matrices inter-groupes et les termes d'échange avec l'extérieur, voir (16). Comme conséquence des hypothèses de hiérarchie (10) (portant sur le regroupement d'états fortement couplés), les variables n_i^α sont des variables rapides par rapport aux variables de groupe n^α . Pour tout groupe α et pour tout état i , il vient :

$$\left| \dot{n}_i^\alpha \right| \ll \left| \dot{n}^\alpha \right|. \quad (17)$$

Les variables de groupes sont très lentes par rapport aux variables d'état, ce qui provient du fait que les éléments changent souvent d'états à l'intérieur du même groupe alors qu'en comparaison ils changent peu d'états entre groupes différents. Ainsi, la hiérarchie dans l'intensité des taux de transition se traduit par une hiérarchie dans le temps.

d) Distribution d'équilibre intra-groupes

La seconde condition de hiérarchie qui suppose des trajectoires convergentes autour d'un point stationnaire permet de justifier l'existence d'équilibre intra-groupe, correspondant précisément à l'un de ces points stationnaires attractifs. Les deux niveaux possèdent des temps caractéristiques très différents. Ainsi, les transitions intra-groupes sont très fréquentes en regard des transitions inter-groupes. Nous admettons l'existence d'équilibres intra-groupes caractérisés par des fréquences d'états. Soit v_i^α la fréquence d'équilibre d'occupation de l'état i du groupe α définie de la manière suivante :

$$v_i^\alpha = \frac{n_i^\alpha(t)}{n^\alpha(t)} \text{ avec } \sum_i v_i^\alpha = 1. \quad (18)$$

Pour le moment, nous admettons l'existence de ces fréquences d'états indépendantes du temps. Dans la partie 3, nous donnerons des exemples de calcul de ces fréquences d'états qui représentent la proportion d'éléments dans le $i^{\text{ème}}$ état d'un groupe α à l'équilibre. En conséquence, à chaque instant t , il vient :

$$n_i^\alpha(t) = v_i^\alpha n^\alpha(t) \quad (19)$$

e) Dynamique de groupe

Remplaçons (19) dans l'équation (16) pour obtenir les équations dynamiques gouvernant les variables de groupe :

$$\dot{n}^\alpha = e^\alpha + \sum_\beta a^{\alpha\beta} n^\beta, \quad (20)$$

avec

$$e^\alpha = \sum_i e_i^\alpha \quad \text{et} \quad a^{\alpha\beta} = \sum_i \sum_k a_{ik}^{\alpha\beta} v_k^\beta$$

Soit A_g une matrice de groupe définie comme suit :

$$A_g = \begin{pmatrix} a^{11} & a^{12} & \dots & a^{1A} \\ a^{21} & a^{22} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^{A1} & \dots & \dots & a^{AA} \end{pmatrix} \quad (21)$$

La matrice A_g est une matrice carrée de dimension A alors que la matrice de transition A , voir (9), est une matrice carrée de dimension $A \times N_g$ si N_g représente le nombre d'états dans un groupe. Par exemple, avec 5 groupes de 5 états chacun, la matrice A_g possède une dimension 5 alors que la matrice A possède une dimension 25. Ainsi, l'obtention des équations de la dynamique de groupe s'accompagne d'une réduction importante du nombre des variables.

f) Interactions entre les niveaux

Comme le montrent les équations (20), les taux des transitions inter-groupes $a^{\alpha\beta}$ dépendent des fréquences d'occupation intra-groupes des états. En conséquence, une variation de ces fréquences intra-groupes $v_i^\alpha \rightarrow v_i^\alpha + \delta v_i^\alpha$ induira une variation des taux de transition inter-groupes $a^{\alpha\beta} \rightarrow a^{\alpha\beta} + \delta a^{\alpha\beta}$ telle que :

$$\delta a^{\alpha\beta} = \sum_i \sum_k a_{ik}^{\alpha\beta} \delta v_k^\beta. \quad (22)$$

La dynamique de groupe est dépendante des distributions d'équilibre à l'intérieur des groupes. La cinétique inter-groupes dépend des fréquences intra-groupes. Une variation de ces fréquences produit une variation des taux de transformation collectifs. Cette action est celle du niveau plus microscopique sur celle du niveau plus macroscopique. Il s'agit d'un couplage que nous pouvons qualifier du bas vers le haut. Le phénomène

inverse est possible et correspond à l'action du niveau plus macroscopique sur le niveau plus microscopique. Nous pouvons le qualifier de couplage du haut vers le bas. Ce dernier type de couplage apparaît en particulier lorsque les fréquences intra-groupes sont dépendantes des tailles de groupes, c'est-à-dire lorsque l'on a :

$$v_i^\alpha = f_i^\alpha(n^\alpha(t)). \quad (23)$$

f_i^α sont des fonctions des variables de groupes. Dans ce cas, les fréquences ne sont plus indépendantes du temps car elles dépendent des variables n^α elles-mêmes dépendantes du temps. En conséquence, lorsque (23) est vraie, une variation des variables de groupe donne lieu à une redistribution des éléments dans les groupes. Nous voyons qu'une action réciproque d'un niveau sur l'autre est susceptible de se produire. Il y a interaction entre les deux niveaux.

1.3 Diffusion dans un système linéaire à deux niveaux

Dans de nombreux cas, les variables dépendent des coordonnées spatiales cartésiennes x, y, z . Dans ce cas, il est nécessaire de considérer des densités de présence des éléments $\rho_i^\alpha(x, y, z, t)$, c'est-à-dire nombre d'éléments dans l'état i du groupe α par unité de volume autour du point (x, y, z) à l'instant t , (homogènes à L^{-3}). Pour prendre en compte le phénomène de diffusion dans l'espace, il est nécessaire d'adjoindre des termes de diffusion à l'équation (5) :

$$\frac{\partial \rho_i^\alpha}{\partial t} = D_i^\alpha \left(\frac{\partial^2 \rho_i^\alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho_i^\alpha}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \rho_i^\alpha}{\partial z^2} \right) + e_i^\alpha + \sum_j a_{ij}^\alpha \rho_j^\alpha + \sum_{\beta, k} a_{ik}^{\alpha\beta} \rho_k^\beta. \quad (24)$$

Les constantes D_i^α sont des coefficients de diffusion des éléments se trouvant dans l'état i du groupe α (homogènes à L^2T^{-1}). Dans ce cas, les taux de transition a_{ij}^α et $a_{ik}^{\alpha\beta}$ sont homogènes à T^{-1} et les taux d'échanges e_i^α à $L^{-3}T^{-1}$. Dans le cas de la diffusion, les hypothèses de hiérarchie sont complétées, voir (10). En tout point (x, y, z) et pour tout $(\alpha, \beta, i, j, k, l)$ nous

devons vérifier que :

$$\left| a_{ij}^\alpha \right| \gg \left| e_i^\alpha V \right|, \left| a_{kl}^{\alpha\beta} \right| \text{ et } \left\{ D_i^\alpha / S \right\}. \quad (25)$$

V est un volume et S une surface de sorte que l'inégalité (25) soit homogène. De cette manière, tout comme la dynamique inter-groupes et les échanges avec le milieu extérieur, le processus de diffusion est supposé très lent par rapport à la dynamique intra-groupes. Dans (25), on peut considérer un volume V unité et une surface S unité. D'autre part, comme dans le cas linéaire sans diffusion, nous admettons que *pour chaque groupe isolé*, c'est-à-dire en négligeant la partie lente de (24), (inter-groupe, échanges avec l'extérieur et diffusion), et en ne conservant uniquement que la partie rapide intra-groupes, voir (11), il existe *au moins un point stationnaire attractif*. Soit $\rho^\alpha(x, y, z, t)$ la densité d'éléments du groupe α par unité de volume autour du point (x, y, z) à l'instant t .

$$\rho^\alpha(x, y, z, t) = \sum_i \rho_i^\alpha(x, y, z, t). \quad (26)$$

Comme dans la partie précédente, considérons des fréquences d'équilibre intra-groupes v_i^α associées à un point stationnaire attractif, définies comme suit :

$$v_i^\alpha = \frac{\rho_i^\alpha(x, y, z, t)}{\rho^\alpha(x, y, z, t)}. \quad (27)$$

En utilisant la même technique que dans la partie précédente, on obtient les équations de la dynamique de groupe gouvernant les variables ρ^α :

$$\frac{\partial \rho^\alpha}{\partial t} = D^\alpha \left(\frac{\partial^2 \rho^\alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho^\alpha}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \rho^\alpha}{\partial z^2} \right) + e^\alpha + \sum_{\beta} a^{\alpha\beta} \rho^\beta,$$

$$\text{avec } D^\alpha = \sum_i v_i^\alpha D_i^\alpha, \quad e^\alpha = \sum_i e_i^\alpha, \quad (28)$$

$$\text{et } a^{\alpha\beta} = \sum_i \sum_k a_{ik}^{\alpha\beta} v_k^\beta.$$

Le coefficient de diffusion collectif D^α est également dépendant des fréquences intra-groupes d'équilibre. Le phénomène de diffusion est lui-même influencé par la cinétique intra-groupes.

1.4 Système non linéaire à deux niveaux

Dans cette partie, nous ne considérerons que des termes non linéaires du second ordre sans diffusion. Dans ces conditions, les équations (5) se réécrivent comme suit :

$$\dot{n}_i^\alpha = e_i^\alpha + \sum_j a_{ij}^{\alpha} n_j^\alpha + \sum_\beta \sum_k a_{ik}^{\alpha\beta} n_k^\beta + \sum_{jk} b_{ijk}^{\alpha} n_j^\alpha n_k^\alpha + \sum_{\beta lm} b_{ilm}^{\alpha\beta} n_l^\alpha n_m^\beta. \quad (29)$$

Dans l'équation (29), il y a des termes non linéaires supplémentaires par rapport à l'équation (5) avec des coefficients b_{ijk}^{α} et $b_{ilm}^{\alpha\beta}$. Ces termes correspondent à des interactions entre 2 éléments. b_{ijk}^{α} est le taux d'une réaction dans le même groupe α . Un élément dans l'état j du groupe α réagit avec un élément dans l'état k du même groupe α et cela produit une variation du nombre d'éléments dans l'état i du groupe α . $b_{ilm}^{\alpha\beta}$ est le taux d'une réaction entre éléments appartenant à des groupes différents α et β . Un élément dans l'état 1 du groupe α interagit avec un élément dans l'état m du groupe β et cela produit une variation du nombre d'éléments dans l'état i du groupe α . Dans le cas non linéaire, les hypothèses de hiérarchie (10) doivent être complétées, de sorte que pour tout $(\alpha, \beta, i, j, k, l, m)$:

$$\left| b_{ijk}^{\alpha} \right|, \left| a_{ij}^{\alpha} \right| \gg \left| e_i^\alpha \right|, \left| a_{kl}^{\alpha\beta} \right| \text{ et } \left| b_{ilm}^{\alpha\beta} \right|. \quad (30)$$

Tout comme précédemment, les transformations intra-groupes linéaires et non linéaires sont supposées beaucoup plus fréquentes que les

transformations inter-groupes et les échanges avec l'extérieur. Similairement, nous supposons qu'il existe au moins un point stationnaire attractif associé à chaque groupe isolé. En utilisant la même technique que précédemment avec des fréquences d'équilibre v_i^α , on obtient les équations de la dynamique de groupe comme suit :

$$\dot{n}^\alpha = e^\alpha + \sum_\beta a^{\alpha\beta} n^\beta + \sum_\beta b^{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta,$$

$$\text{avec } e^\alpha = \sum_i e_i^\alpha, \quad a^{\alpha\beta} = \sum_{ij} a_{ij}^{\alpha\beta} v_j^\beta, \quad (31)$$

$$\text{et } b^{\alpha\beta} = \sum_{ilm} b_{ilm}^{\alpha\beta} v_l^\alpha v_m^\beta.$$

Tout comme dans le cas linéaire, les taux des transformations collectives dépendent des distributions intra-groupes, autorisant des interactions entre niveaux. Le modèle peut facilement se généraliser pour des termes non linéaires du troisième ordre ou plus avec diffusion dans l'espace.

2. Système à trois niveaux

Nous ne traiterons que le cas linéaire sans diffusion. Dans un système à trois niveaux Σ , les éléments occupent des états i rassemblés en groupes α , eux-mêmes constitués en groupes de groupes a . La figure 3 présente un tel ensemble à trois niveaux. Dans ces conditions, les nouvelles variables sont $n_i^{\alpha a}(t)$, c'est-à-dire nombre d'éléments dans l'état i du groupe α du groupe de groupes a à l'instant t . Les équations dynamiques s'écrivent alors :

$$\dot{n}_i^{\alpha a} = e_i^{\alpha a} + \sum_j a_{ij}^{\alpha a} n_j^{\alpha a} + \sum_\beta \sum_k a_{ik}^{\alpha\beta a} n_k^\beta + \sum_b \sum_\gamma \sum_l a_{il}^{\alpha\gamma b} n_l^{\gamma b} \quad (32)$$

$e_i^{\alpha a}$ est le taux d'échange avec l'extérieur du système Σ pour les éléments dans l'état i du groupe α du groupe de groupes a . $a_{ij}^{\alpha a}$ sont des taux de

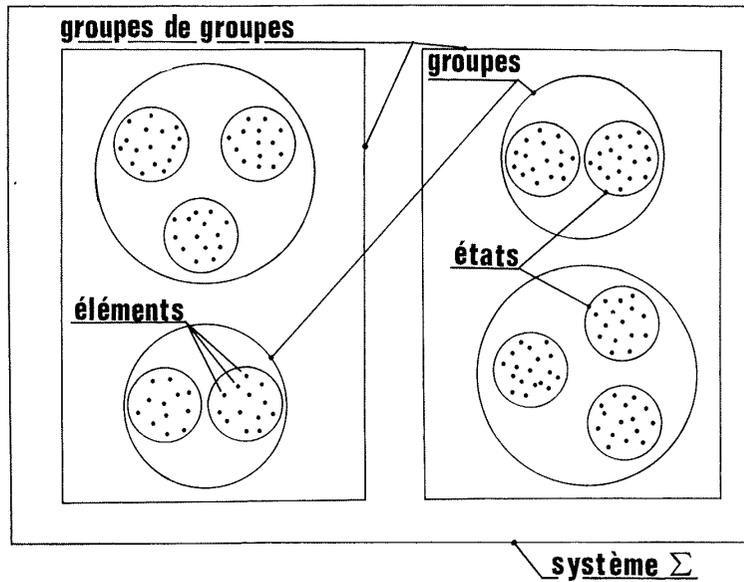


Figure 3. Schéma d'un système hiérarchisé comportant trois niveaux d'organisation.

transition intra-groupes α , ($j \rightarrow i$ dans le groupe α du groupe de groupes a). $a_{ik}^{\alpha \beta a}$ sont des taux de transition inter-groupes α et β dans le même groupe de groupes a (k dans β de $a \rightarrow i$ dans α de a). $a_{i1}^{\alpha a \gamma b}$ sont des taux de transition inter-groupes de groupes a et b (1 dans γ de $b \rightarrow i$ dans α de a). Dans un système à trois niveaux, nous avons une double hiérarchie :

$$\text{Pour tout } (a, \alpha, \beta, i, j, k) \quad \left| a_{ij}^{\alpha a} \right| \gg \left| a_{ik}^{\alpha \beta a} \right|. \quad (33)$$

Les transitions intra-groupes sont beaucoup plus fréquentes que les transitions inter-groupes dans le même groupe de groupes. D'autre part, pour tout $(a, b, \alpha, \beta, \gamma, i, k, l)$:

$$\left| a_{ik}^{\alpha \beta a} \right| \gg \left| a_{il}^{\alpha a \gamma b} \right| \text{ et } \left| e_i^{\alpha a} \right|. \quad (34)$$

Ce qui signifie que les transformations intra-groupes de groupes sont beaucoup plus fréquentes que les transformations inter-groupes de groupes. On doit également supposer au moins un point stationnaire

attractif pour chaque groupe isolé ainsi que pour chaque groupe de groupes isolé. La figure 4 présente un exemple de graphe de transition pour un système à trois niveaux.

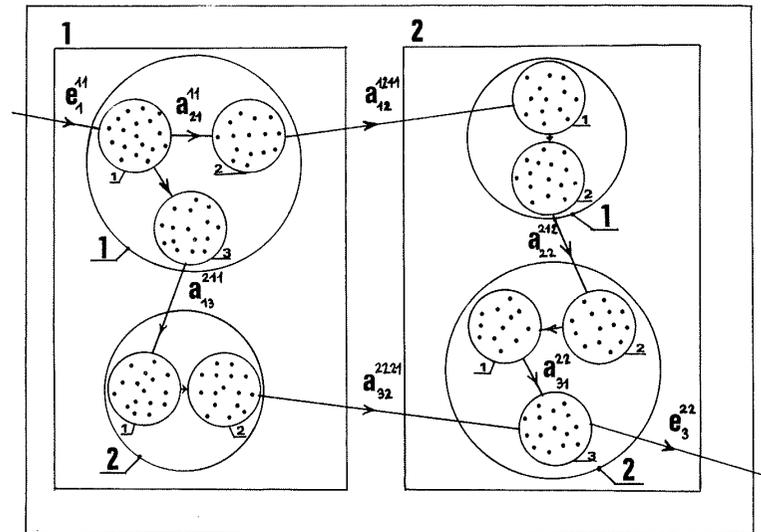


Figure 4. Graphe de transition dans un système à trois niveaux

Avec les hypothèses de hiérarchie (33) et (34), en utilisant la même technique que pour un système à deux niveaux, il est possible de montrer que la hiérarchie dans les transitions s'accompagne d'une hiérarchie dans le temps.

$$\left| \dot{n}_i^{\alpha a} \right| \gg \left| \dot{n}^{\alpha a} \right| \gg \left| \dot{n}^a \right|, \quad (35)$$

$$\text{avec } n^{\alpha a} = \sum_i n_i^{\alpha a} \text{ et } n^a = \sum_{\alpha} \sum_i n_i^{\alpha a}.$$

Introduisons les fréquences d'états i pour le groupe α du groupe de groupes a :

$$v_i^{\alpha a} = \frac{n_i^{\alpha a}(t)}{n^{\alpha a}(t)}. \quad (36)$$

Les mêmes techniques que celles utilisées dans les parties précédentes conduisent aux équations de la dynamique du niveau intermédiaire :

$$\dot{n}^{\alpha a} = e^{\alpha a} + \sum_{\beta} a^{\alpha \beta a} n^{\beta a} + \sum_b \sum_{\gamma} a^{\alpha a \gamma b} n^{\gamma b}, \quad (37)$$

avec
$$e^{\alpha a} = \sum_i e_i^{\alpha a}, \quad a^{\alpha \beta a} = \sum_{i k} a_{i k}^{\alpha \beta a} v_k^{\beta a},$$

et
$$a^{\alpha a \gamma b} = \sum_{i l} a_{i l}^{\alpha a \gamma b} v_l^{\gamma b}.$$

Introduisons des fréquences de groupes α dans le groupe de groupes a :

$$v^{\alpha a} = \frac{n^{\alpha a}(t)}{n^a(t)}. \quad (38)$$

Enfin, toujours en utilisant les mêmes techniques, on obtient les équations dynamiques du niveau le plus macroscopique :

$$\dot{n}^a = e^a + \sum_b a^{ab} n^b, \quad (39)$$

avec
$$e^a = \sum_{\alpha} e^{\alpha a},$$

et
$$a^{ab} = \sum_{\alpha \gamma} a^{\alpha a \gamma b} v^{\gamma b}.$$

La figure 5 symbolise la réduction du nombre des variables à chaque saut de niveau.

3. Thermodynamique d'un système comportant deux niveaux

3.1 Entropies des groupes isolés

Soit t le temps d'observation du système. Soit t^α le temps

	<u>variables</u>	<u>nombre de variables</u>
N^* groupes de groupes	n^a	N^*
N_g groupes	$n^{\alpha a}$	$N^* N_g$
N_s états	$n_i^{\alpha a}$	$N^* N_g N_s$

Figure 5. Décomposition d'un système à trois niveaux en trois sous-systèmes couplés.

caractéristique ou de relaxation associé au groupe α et t_Σ le temps de relaxation associé au système Σ dans sa totalité. Ces temps de relaxation caractérisent respectivement le temps moyen nécessaire à un retour à l'équilibre lorsque chaque groupe isolé ou le système Σ entier en sont écartés.

Nous avons vu que les variables de groupe varient très lentement par rapport aux variables d'état, voir l'inéquation (17). En conséquence, on peut considérer des durées d'observation t pour lesquelles les variables de groupe peuvent être considérées comme constantes, $\dot{n}^{\alpha a} t \cong 0$, alors que les variables d'états sont à l'équilibre, c'est-à-dire pour lesquelles on a $t^\alpha \ll t \ll t_\Sigma$. Ceci correspond à considérer *les groupes comme isolés les uns des autres*. Pour simplifier, nous ne considérerons que l'ensemble microcanonique. L'état d'équilibre de chaque groupe s'obtient en maximisant le nombre de complexions Ω^α correspondant à *chaque groupe isolé* sous deux contraintes :

$$\Omega^\alpha = \frac{n^{\alpha a}!}{\prod_i n_i^{\alpha a}!} \quad (40)$$

avec
$$E^\alpha = \sum_i n_i^\alpha E_i^\alpha = \text{constante},$$

et
$$n^\alpha = \sum_i n_i^\alpha = \text{constante pendant } t.$$

Le temps d'observation t est trop petit par rapport à t_Σ pour que les effets du couplage inter-groupe se fassent sentir. Dans ces conditions, le nombre d'éléments par groupe reste constant pendant t et nous considérons de plus une intégrale première E^α , par exemple une énergie pour chaque groupe α , E_i^α est l'énergie associée à l'état i du groupe α . On peut associer une entropie à chaque groupe isolé S^α :

$$S^\alpha = k \ln \Omega^\alpha, \quad (41)$$

avec k pour la constante de Boltzmann. On obtient alors les fréquences d'équilibre intra-groupes comme suit :

$$v_i^\alpha = \frac{n_i^{\alpha*}}{n^\alpha} = \frac{\exp\left(-\frac{E_i^\alpha}{kT^\alpha}\right)}{Z^\alpha} \quad (42)$$

avec
$$T^\alpha = \frac{dE^\alpha}{k d(\log[\Omega^\alpha])}$$

Z^α est la fonction de partition, T^α est la « température », voir P. Auger [5]. Pour un temps d'observation t tel que $t^\alpha \ll t \ll t_\Sigma$, il est clair que les groupes étant isolés, ils atteignent chacun leur propre équilibre indépendamment les uns des autres. En conséquence, dans le cas général les températures T^α seront différentes. Les grandeurs étoilées sont les populations d'équilibre. Nous nous limitons ici à l'ensemble microcanonique mais le calcul des fréquences intra-groupes peut être généralisé à d'autres ensembles et à différents domaines que la Physique. Nous indiquons quelques références, J. D. Cowan pour les systèmes de neurones [14], L. Demetrius en biologie des populations [17], N. S. Goel et coll. en écologie [21], E. H. Kerner [23] et J. Schnakenberg [29] pour divers systèmes

en particulier en écologie et également P. Auger [5] pour des systèmes plus généraux avec des états non équiprobables.

3.2 Entropie de groupe et entropie du système

Dans cette partie, nous allons traiter le système Σ tout entier comme un ensemble microcanonique. Nous considérons l'équilibre thermodynamique pour le système dans son ensemble et non pour chaque groupe isolé α seulement. De cette manière, nous considérons un temps d'observation t tel que $t^\alpha \ll t_\Sigma \ll t$. Nous ne pouvons plus négliger les variations des nombres d'éléments de chaque groupe. Les groupes ne sont plus indépendants, ils sont couplés par les termes inter-groupe. Les populations d'équilibre s'obtiennent alors en maximisant le nombre total de complexions Ω_Σ du système en entier sous deux contraintes :

$$\Omega_\Sigma = \frac{N_\Sigma!}{\prod_\alpha \prod_i n_i^\alpha!} = \frac{N_\Sigma!}{\prod_\alpha n^\alpha!} \cdot \prod_\alpha \left(\frac{n_i^{\alpha!}}{\prod_i n_i^\alpha!} \right), \quad (43)$$

avec
$$E_\Sigma = \sum_\alpha \sum_i E_i^\alpha n_i^\alpha = \sum_\alpha E^{\alpha*} = \text{constante},$$

et
$$N_\Sigma = \sum_\alpha \sum_i n_i^\alpha = \text{constante}.$$

Nous considérons toujours l'ensemble microcanonique pour lequel le nombre N_Σ d'éléments et l'énergie totale E_Σ de Σ sont supposés constants. Le nombre total de complexions s'écrit comme suit :

$$\Omega_\Sigma = \Omega_c \cdot \prod_\alpha \Omega^{\alpha*} \quad \text{avec} \quad \Omega_c = \frac{N_\Sigma!}{\prod_\alpha n^\alpha!} \quad (44)$$

$\Omega^{\alpha*}$ est toujours définie par (40) et représente le nombre de complexions pour un groupe α , mais cette fois pour les groupes α couplés. L'entropie S_Σ du système est donnée par :

$$S_{\Sigma} = k \ln \Omega_{\Sigma}. \quad (45)$$

$$S_{\Sigma} = k \ln \left\{ \Omega_c \cdot \prod_{\alpha} \Omega^{\alpha*} \right\} = S_c + \sum_{\alpha} S^{\alpha*},$$

avec $S_c = k \ln \Omega_c$ et $S^{\alpha*} = k \ln \Omega^{\alpha*}$.

S_c est une entropie collective, correspondant à la distribution des éléments dans les groupes et $S^{\alpha*}$ est une entropie de groupe correspondant à la distribution des éléments dans les états de chaque groupe, identique à (41), mais pour une distribution des éléments appartenant aux groupes couplés. L'entropie d'un système à deux niveaux est donc la somme d'une entropie S_c relative au niveau le plus macroscopique et d'entropies $S^{\alpha*}$ relatives au niveau le plus microscopique. Il faut noter ici que les entropies $S^{\alpha*}$ sont différentes des entropies S^{α} . En effet, *la distribution d'équilibre $n^{\alpha*}$ d'un groupe isolé est en général différente de celle d'un groupe couplé* car les distributions qui *maximisent les nombres Ω^{α} isolément* sont en général différentes de celles qui *maximisent le nombre total de complexions Ω_{Σ}* . Ainsi, si l'on remplace $S^{\alpha*}$ par S^{α} dans l'équation (45), il faut adjoindre *une entropie de couplage par groupe ΔS^{α} qui peut facilement s'obtenir en tenant compte des variations sur les distributions d'équilibre couplées et non couplées, $n^{\alpha*} \rightarrow n^{\alpha} + \Delta n^{\alpha*}$* . L'entropie d'un ensemble de groupes isolés est en général différente de l'entropie d'un ensemble de groupes couplés. Les entropies de couplage correspondent à cet effet de synergie mais seront des termes petits parce que nous avons supposé que les termes inter-groupes restaient petits par rapport aux termes intra-groupe. Nous n'explicitons pas le calcul de ces entropies de couplage. On obtient alors pour les distributions d'équilibre par groupe ($n^{1*}, n^{2*}, \dots, n^{\alpha*}, \dots, n^{A*}$) :

$$n^{\alpha*} = \frac{N_{\Sigma}}{Z_{\Sigma}} \exp \left(-\frac{E^{\alpha*}}{kT_{\Sigma}} \right). \quad (46)$$

avec $T_{\Sigma} = \frac{dE_{\Sigma}}{k d(\log[\Omega_{\Sigma}])}$

Z_{Σ} est la fonction de partition et T_{Σ} est la température pour le système entier, c'est-à-dire lorsque l'on attend que tous les groupes couplés s'équilibrent à la même température T_{Σ} qui caractérise l'équilibre global. Au cours d'une transformation réversible, la variation d'entropie totale du système est :

$$\Delta S_{\Sigma} = \Delta S_c + \sum_{\alpha} \Delta S^{\alpha} = 0. \quad (47)$$

Ceci peut être obtenu de diverses manières, en particulier avec :

$$\Delta S_c = -\sum_{\alpha} \Delta S^{\alpha} < 0. \quad (48)$$

Ce qui correspond à une baisse d'entropie au niveau macroscopique et à une augmentation d'entropie équivalente au niveau microscopique. Nous pouvons parler d'échange vertical d'entropie entre les niveaux. Le niveau microscopique exporte de la négentropie vers le niveau macroscopique. Ceci signifie que la structuration au niveau collectif s'accompagne par exemple d'un dégagement de chaleur au niveau macroscopique. Les systèmes vivants présentent justement une température stable supérieure au milieu extérieur qui peut s'interpréter comme de l'entropie provenant des niveaux supérieurs et qui est ensuite exportée vers l'extérieur. Dans les systèmes à plusieurs niveaux, les échanges d'entropie ne se font pas seulement entre le système Σ et l'extérieur mais également dans le système entre les différents niveaux hiérarchiques. Enfin, il est clair que pour un système composé de trois niveaux, l'entropie totale S_{Σ} se décomposerait en une somme de trois entropies, chacune étant relative à un des trois niveaux d'organisation du système Σ .

4. Application en écologie

Dans ce paragraphe, nous présentons un exemple écologique et nous donnons les références [4, 8, 11]. Soit une espèce animale dont les individus peuvent avoir différents âges α , correspondant aux groupes et pouvant sélectionner diverses activités i au cours de la journée, correspondant aux états. Les activités peuvent être la recherche de nourriture de différents types, le camouflage, la chasse, etc. Ainsi, la variable d'état $n_i^{\alpha}(t)$ représente le nombre d'animaux faisant l'activité i et ayant l'âge α à l'instant t .

Choisissons les équations dynamiques suivantes :

$$\alpha = 1, \quad \dot{n}_r^1 = \sum_s a_{rs}^1 n_s^1 - (d_r^1 + N^2 b_r^1) n_r^1 + \sum_\beta \sum_k m_k^\beta n_k^\beta, \quad (49)$$

$$\alpha \neq 1, \quad \dot{n}_r^\alpha = \sum_s a_{rs}^\alpha n_s^\alpha - (d_r^\alpha + N^{\alpha+1} b_r^\alpha) n_r^\alpha + \sum_k b_k^{\alpha-1} n_k^{\alpha-1}.$$

Les matrices $A = [a_{rs}^\alpha]$ décrivent les changements d'activités des animaux ayant l'âge α . a_{rs}^α est le taux de transition de l'activité s vers l'activité r pour les animaux ayant l'âge α . Tous les autres termes concernent les changements de classe d'âge. d_r^α et b_r^α sont respectivement les taux de mortalité et de vieillissement pour les animaux faisant l'activité r et ayant l'âge α . Ces taux dépendent de l'activité car certaines activités sont plus dangereuses que d'autres. m_k^β est le taux de reproduction provenant des animaux ayant l'âge β .

Les animaux changent très fréquemment d'activités en comparaison des changements de classes d'âge, par exemple pour des classes de 6 mois. Il s'agit donc bien d'un système hiérarchisé. Nous avons :

$$\text{Pour tout } (\alpha, \beta, r, s, k), \quad \left| a_{rs}^\alpha \right| \gg d_r^\alpha, b_r^\alpha \text{ et } m_k^\beta. \quad (50)$$

Ici, les fréquences d'équilibre intra-groupe v_r^α sont les pourcentages moyens d'animaux faisant l'activité r et ayant l'âge α .

$$v_r^\alpha = \frac{n_r^\alpha}{n^\alpha}, \quad \text{avec} \quad n^\alpha = \sum_r n_r^\alpha, \quad (51)$$

où n^α représente le nombre d'animaux d'âge α . Les méthodes présentées dans les paragraphes précédents conduisent aux équations de la dynamique de la population :

$$\alpha = 1, \quad \dot{n}^1 = -(d^1 + b^1) n^1 + \sum_\beta m^\beta n^\beta, \quad (52)$$

$$\alpha \neq 1, \quad \dot{n}^\alpha = -(d^\alpha + b^\alpha) n^\alpha + b^{\alpha-1} n^{\alpha-1}.$$

Les taux de mortalité, de vieillissement et de reproduction d^α , b^α et m^β dépendent des fréquences d'activité v_r^α et sont donnés par :

$$d^\alpha = \sum_r d_r^\alpha v_r^\alpha, \quad b^\alpha = N^{\alpha+1} \sum_r b_r^\alpha v_r^\alpha, \quad (53)$$

$$m^\beta = N^1 \sum_k m_k^\beta v_k^\beta.$$

Ainsi, les paramètres du niveau de la population sont connus à partir des séquences d'activité des animaux. Si l'on connaît par exemple les variations avec le climat (ou avec un changement de l'environnement) des activités des animaux, on peut calculer les nouveaux taux globaux de mortalité, de vieillissement et de reproduction. Ceci peut conduire à une extinction ou bien à un développement important de l'espèce.

Discussion et conclusion

Ce modèle général de système hiérarchisé peut être appliqué à l'étude de divers problèmes dans des domaines différents.

Une première application consiste à coupler les niveaux moléculaire et cellulaire. Dans ce cas, nous avons les correspondances suivantes :

éléments \rightarrow molécules

états \rightarrow diverses espèces moléculaires i

groupes \rightarrow populations dans diverses phases du cycle α

système $\Sigma \rightarrow$ population cellulaire entière

dynamique intra-groupes \rightarrow cinétique biochimique intra-cellulaire :

variables n_i^α

dynamique inter-groupes \rightarrow cinétique cellulaire : variables n^α

Nous indiquons les références suivantes sur ce sujet [8, 13]. On peut par exemple obtenir les paramètres du niveau cellulaire comme les taux de vieillissement des cellules en phase G_1 à partir des paramètres du niveau biochimique comme les taux des réactions chimiques et les concentrations des diverses molécules, initiateur de réplication, inhibiteur ou facteur de croissance, [13].

Une deuxième application consiste à coupler les niveaux de l'individu, de la population et de l'écosystème en écologie. Nous avons alors les correspondances suivantes :

éléments → animaux

états → diverses activités des animaux r

groupes → classes d'âge α

groupes de groupes → diverses espèces animales a

système Σ → écosystème

dynamique intra-groupes → cinétique des activités des animaux :

variables $n_r^{\alpha a}$

dynamique intra-groupes de groupes → cinétique des populations :

variables $n^{\alpha a}$

dynamique inter-groupes de groupes → cinétique de l'écosystème :

variables n^a

On peut ainsi relier les paramètres du niveau de la population tels que les taux de vieillissement ou de mort des différentes classes d'âge aux paramètres du niveau de l'individu tels que les fréquences d'activités (voir le paragraphe 4.) ou bien encore relier les paramètres du niveau de l'écosystème tels que les coefficients de proie-prédation aux paramètres du niveau de la population tels que les proportions d'animaux dans les diverses classes d'âge. Nous indiquons sur ce sujet les références suivantes [4, 6, 8, 11].

Une troisième application consiste à coupler les niveaux sectoriel, régional, national et international en économie. Nous avons la correspondance suivante :

éléments → biens

états → secteurs r

groupes → régions α

groupes de groupes → nations a

système Σ → système mondial

dynamique intra-groupes → échanges intersectoriels dans une région :

variables $n_r^{\alpha a}$

dynamique inter-groupes → échanges inter-régionaux :

variables $n^{\alpha a}$

dynamique inter-groupes de groupes → échanges internationaux :

variables n^a

Ces modèles permettent de connecter les taux des flux intersectoriels d'un niveau supérieur aux taux des flux d'un niveau inférieur. Nous indiquons sur ce sujet les références [7, 8, 9, 12].

Alors qu'en physique, le nombre de niveaux se réduit essentiellement à deux, le niveau moléculaire et le niveau du gaz, du solide ou du liquide, il nous semble qu'en biologie, en médecine ou en économie il existe un plus grand nombre de niveaux. Ces disciplines nous semblent pour cette raison plus concernées par des modèles de systèmes hiérarchisés. Par ailleurs, on rencontre dans ces dernières disciplines de nombreux modèles compartimentaux avec des équations différentielles du type des équations (2), ce qui justifie le choix des équations utilisées dans ce travail.

Références

- [1] T. F. H. ALLEN and T. B. STARR, «Hierarchy. Perspectives for ecological complexity», University of Chicago, Chicago, 1982.
- [2] P. AUGER, «Coupling between N levels of observation of a system (biological or physical) resulting in creation of structure», *Int J. Gen. Sys.* Vol. 6, pp 82-100, 1980.
- [3] P. AUGER, «Order, disorder in hierarchically organized systems», *Int. J. Gen. Sys.* Vol. 8, pp 109-115, 1982.
- [4] P. AUGER, «Hierarchically organized populations : interactions between individual, population and ecosystem levels», *Math. Biosci.* Vol. 65, pp 269-289, 1983.
- [5] P. AUGER, «On self-organization processes in microcanonical ensembles with non equiprobable states», *In. J. Sys. Sci.* Vol. 15, pp 877-884, 1984.
- [6] P. AUGER, «Stability of interacting populations with age-class distributions», *J. Theor. Biol.* Vol. 112, pp 595-605, 1985.

- [7] P. AUGER, «Hierarchically organized economics : input-output analysis», *Int. J. Sys. Sci.* Vol. 16, pp 1293-1304, 1985.
- [8] P. AUGER, «Dynamics in hierarchically organized systems : a general model applied to ecology, biology and economics», *Syst. Res.* Vol. 3, pp 41-50, 1986.
- [9] P. AUGER, «A transformational model of economies from late to post industrial periods», *Syst. Res.* Vol. 4, pp 39-45, 1987.
- [10] P. AUGER, «Contribution à l'étude de l'auto-organisation structurale dans les systèmes hiérarchisés : application à quelques systèmes physico-chimiques», *Ph. D. Thesis.* Université d'Angers, Angers, 1982.
- [11] P. AUGER, «Dynamics in hierarchically organized systems», dans «Dynamics of macrosystems », *Lecture notes in Economics and in Mathematical Systems.* Vol. 257, J. P. Aubin editeur, Springer-Verlag, pp 203-212, 1985.
- [12] P. AUGER, «Production nationale et productions sectorielles», *Economies et Sociétés.* Vol. 10, pp 65-75, 1986.
- [13] P. AUGER, «Cellular aging rates and biochemical reaction rates», *Mathl Comput. Modelling.* Vol. 11, pp 164-169, 1988.
- [14] J. D. COWAN, «Statistical Mechanics of Neural Nets», dans *Neural networks*, E. R. Caianello editeur, Springer-Verlag, New York, 1968.
- [15] P. DELATTRE, «Transformation system with time dependent characteristics and population theory», *Math. Biosci.* Vol. 32, pp 239-274, 1976.
- [16] P. DELATTRE, *Système, structure, fonction, évolution : essai d'analyse épistémologique*, Maloine, Paris, 1971.
- [17] L. DEMETRIUS, «Statistical mechanics and population biology», *J. Stat. Phys.* Vol. 30, pp 709-753, 1983.
- [18] P. ERDI, «Hierarchical thermodynamic approach to the brain», *Int. J. Neurosci.* Vol. 20, pp 193-216, 1983.
- [19] A. C. EHRESMANN, J. P. WANBREMEERSCH, «Hierarchical evolutive systems : A mathematical model for complex systems», *Bull. Math. Biol.* Vol. 49, pp 13-50, 1987.
- [20] W. FINDEISEN, F. N. BAILEY, M. BRDYS, K. MALINOWSKI, P. TAJIEWSKI, A. WOZNIAK, *Control and coordination in hierarchical systems*, John Wiley, New York, 1980.
- [21] N. S. GOEL, S. C. MAITRA and E.W. MONTRÖLL, «On the Volterra and other non linear models of interacting populations», *Rev. of Mod. Phys.* Vol. 43, pp 231, 1971.
- [22] F. JACOB, *La logique du vivant*, Gallimard, Paris, 1970.

- [23] E. H. KERNER, *Gibbs Ensemble : Biological Ensembles*, Gordon and Breach, London, 1972.
- [24] D. MARTELLATO, «Regional input-output models and inter-regional trade» in *The framework of a national model*, In M. Grassini and A. Smyshlyayev eds, *Third IIASA Task Force Meeting*, IIASA Press, Laxenburg, 1952.
- [25] M. D. MESAROVIC, M. MAKO, Y. TAKAHARA, *Theory of Hierarchical, Multilevel systems*, Academic Press, New York, 1970.
- [27] H. H. PATTEE, *Hierarchy Theory : the Challenge of Complex Systems*, George Braziller, New York, 1973.
- [28] R. ROSEN, «Hierarchical organization in Automata theoretic models of the central nervous system», Dans *Information processing in the nervous system*, pp 21-35, Springer-Verlag, New York, 1969.
- [29] J. SCHNAKENBERG, *Thermodynamical network analysis of biological systems*, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- [30] H. A. SIMON, *The Sciences of the Artificial*, MIT Press, Cambridge, 1969.
- [31] G. TOULOUSE, J. BOK, «Principe de moindre difficulté et organisation hiérarchique», *Rev. Fran. Sociol.* Vol. 19, pp 391-406, 1978.
- [32] B. H. VOORHEES, «Differentiation and emergence in neural hierarchies», Dans *Proceedings of the 28th International conference of the SGSR*, A. W. Smith editeur, Intersystems, New York, pp 621-625, 1984.
- [33] P. WEISS, *Hierarchically Organized Systems in theory and in practise*, Hafner publishing company, New York, 1971.
- [34] P. WEISS, *L'Archipel Scientifique*, Maloine, Paris, 1974.
- [35] L. L. WHYTE, A. G. WILSON, D. WILSON, *Hierarchical Structures*, Elsevier, New York, 1969.