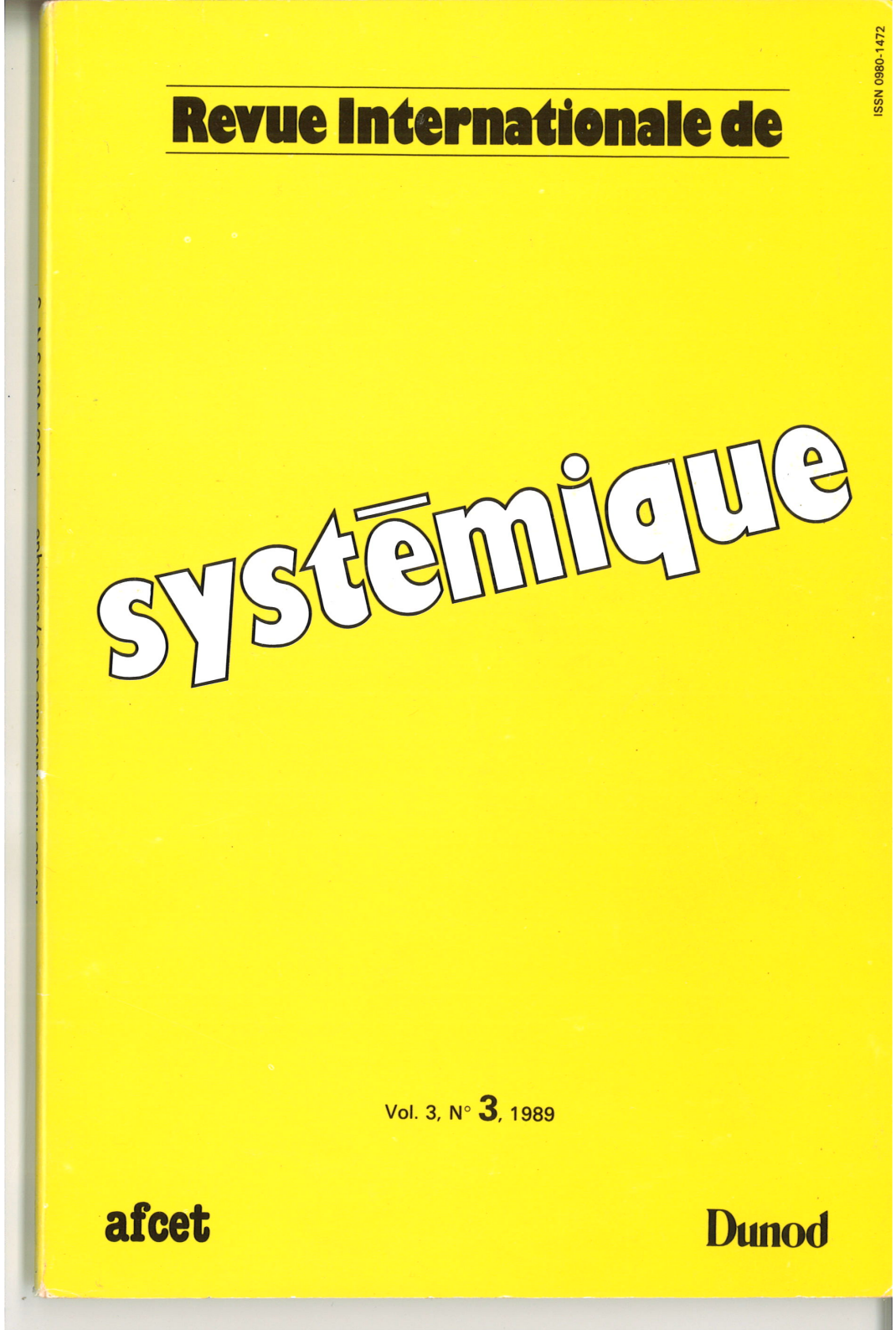

AFSCET

Revue Internationale de systémique

Revue
Internationale
de Sytémique

volume 03, numéro 3, pages 315 - 341, 1989

Modèle d'interaction dynamique entre un système complexe et des agents

Andrée C. Ehresman, Jean-Paul Vanbremeersch

Numérisation Afscet, décembre 2015.

Creative Commons

SPENCER-BROWN George, Laws of form, Dutton, New-York, 1979.

THOM René, Esquisse d'une Sémiophysique, Interéditions, Paris, 1988.

VARELA Francisco, Principles of biological autonomy, North-Holland, New-York/ Oxford, 1979.

WATZLAWICK Paul, HELMICK-BEAVIN Janet, D. JACKSON Donald, Une logique de la communication, Seuil, Paris, 1972.

REVUE INTERNATIONALE DE SYSTEMIQUE
Vol. 3, N° 3, 1989, pp. 315 à 341

MODÈLE D'INTERACTION DYNAMIQUE ENTRE UN SYSTÈME COMPLEXE ET DES AGENTS

A.C. EHRESMANN, J.-P. VANBREMEERSCH

Université de Picardie [1]

Résumé
Les systèmes hiérarchiques évolutifs, introduits dans un article précédent, donnent un modèle mathématique, basé sur la Théorie des Catégories, pour l'étude de systèmes complexes. Ici ce modèle est adapté à l'étude de l'interaction dynamique entre le système global et ses constituants d'un certain type, ce qui permet de décrire un processus général d'apprentissage par «essais et erreurs».

Abstract
A mathematical model for biological or sociological complex systems, based on Category Theory, has been described in a preceding paper. Here this model is adapted to the study of the dynamical interaction between the system and some of its components. The landscape collects the partial information accessible to these "actors", and a general trial and error learning process is described.

Introduction

La modélisation de systèmes naturels ouverts, changeant au cours du temps tout en maintenant leur identité, tels des systèmes biologiques ou sociaux, pose des problèmes de nature spécifique, dont notamment la représentation des composants de niveaux de complexité différents et l'étude des interactions entre ces niveaux. La théorie des catégories, branche récente des Mathématiques, offre un cadre satisfaisant pour abor-

1. Envoyer toute correspondance à : A.C. EHRESMANN, U.F.R. de Mathématiques et Informatique, 33 rue Saint-Leu, 80039 Amiens Cedex.

Revue internationale de systémique. 0980-1472 Vol. 3/89/03/315 - 341/27/$ 4.70 © Gauthier-Villars

der ce problème ; nous l'avons montré dans (Ehresmann et Vanbremeersch, 1987, abrégé en EV1) en introduisant la notion générale de système hiérarchique évolutif, et en modélisant un processus d'évolution par étapes qui consiste en l'assemblage ou le désassemblage de composants complexes, l'addition ou la destruction d'objets. (Les résultats de (EV1) nécessaires ici seront rappelés.)

Dans le présent article, ce modèle est adapté à l'étude de l'interaction dynamique entre le système global et certains de ses constituants, appelés en l'occurrence agents. Le problème sera double :

– obtenir une description du système dans le langage particulier aux agents considérés ; le champ d'un agent, et le paysage de leur population, décriront les informations partielles qu'ils reçoivent sur le système global ;

– déterminer la fonction des agents, c'est-à-dire montrer comment ils utilisent ces informations pour participer à l'évolution du système et «apprendre» à s'adapter dans un environnement changeant, en tenant compte des résultats antérieurs et en respectant les contraintes imposées par la situation. Ceci nous conduira à un modèle général d'évolution adaptative, ou «apprentissage par essais et erreurs», qui peut s'appliquer aussi bien à un système auto-organisé (système biologique ou sociologique) qu'à un système construit par l'homme (robot, système neuronal...), sans parler d'applications de nature plus épistémologique (développement d'une théorie, propagation culturelle, ...).

Ce modèle (comme illustré au §6 sur l'exemple du cycle de réplication cellulaire) permet de comparer les rôles respectifs d'agents de niveaux de complexité différents dans l'évolution d'un système complexe. D'où une réponse possible à une question de R. Rosen (1985) de modéliser des systèmes complexes de sorte que «in a certain sense, a complex system can be regarded as a kind of global limit of its approximately simple subsystems».

Il met aussi en évidence les deux processus complémentaires qui modulent l'évolution : réductionnisme synchronique des niveaux supérieurs aux niveaux inférieurs, et contrôle diachronique de sens opposé. Après des décades de réductionnisme conquérant, ce genre de conception nuancée semble gagner du terrain dans les domaines les plus variés, par exemple en Neurologie, où : «It is only now being appreciated that the complexity of cortical functions cannot be determined solely by building up from the responses of single units and that the reductionist approach must be married with the «top-down» analyses provided by Ethology and Psychophysics» (Altman, 1987).

2. Catégories et objets complexes

Dans cette section, nous allons rappeler diverses définitions qui seront utiles dans la suite. Pour plus de détails, cf. (EV1).

Une *catégorie* (au sens d'Eilenberg-MacLane) est un graphe orienté, avec éventuellement plusieurs flèches entre deux sommets, sur lequel on s'est donné une manière de combiner deux flèches successives $A \to B \to C$ en une nouvelle flèche $A \to C$ appelée leur composé. Cette combinaison vérifie les deux axiomes :

– à chaque sommet A (appelé objet de la catégorie) est associée une flèche fermée $A \to A$, l'identité de A, et une flèche quelconque n'est pas modifiée si on la combine à droite ou à gauche avec une identité.

– étant donné un chemin $A \to A_1 \to \ldots \to A_n \to B$ dans le graphe, quelle que soit la manière de le décomposer en combinant 2 à 2 deux flèches successives, le composé final obtenu pour le chemin entier est le même (associativité).

Un *foncteur* entre deux catégories K et L associe à chaque objet de K un objet de L, à chaque flèche $A \to B$ dans K une flèche dans L entre les objets correspondants, et de plus il préserve la combinaison des liens.

Dans un système naturel, on distingue des composants de niveau de complexité de plus en plus grand ; par exemple dans un organisme ses ions, les molécules, des assemblages de molécules, ses cellules, les tissus, les organes, ... L'état d'un tel système complexe a été modélisé (EV1, §2) par une catégorie K dont les objets sont les composants de différents niveaux du système et les flèches (ou liens) représentent les relations particulières considérées entre eux. Dire qu'un composant est complexe signifie qu'on le considère lui-même comme un assemblage de composants plus «simples» liés entre eux, qui forment son organisation interne et déterminent entièrement ses propriétés. Cette complexité est naturellement toute relative : une cellule est complexe comme assemblage de ses molécules, mais simple en tant que composant d'un tissu. Cette idée de complexité est traduite à l'aide des notions suivantes (EV1,§3).

Un *système d'objets liés* de la catégorie consiste en une famille d'objets A_i et de liens spécifiques entre eux. Un *lien collectif* de ce système lié vers un objet B de la catégorie est une famille de liens individuels f_i de A_i vers B, corrélés par les liens spécifiques, dans le sens qu'en combinant f_i avec un lien spécifique de A_j vers A_i, on doit retrouver f_j.

Un objet A' est appelé *limite* (inductive au sens de Kan, 1958) de ce système lié s'il existe un lien collectif «d'attachement» des A_i vers A', et si tout lien collectif (f_i) du système lié vers un objet B se recolle en un unique lien de A' vers B (qui, par combinaison avec les liens d'attachement, redonne les f_i). Dans ce cas, on dit aussi que A' est un objet complexe, qui est l'assemblage du système des objets liés A_i, et que ce système représente son organisation interne. Ceci est justifié par le fait que les liens de A' vers n'importe quel autre objet correspondent exactement aux liens collectifs du système d'objets liés vers cet objet. Nous avons montré dans (EV1) comment ce modèle permet de comprendre l'émergence de nouvelles propriétés par complexification en utilisant la corrélation des liens individuels formant un lien collectif.

La structure «hiérarchique» d'un système naturel est modélisée par un *système hiérarchique* (EV1, §5) : c'est une catégorie dont les objets sont répartis en différents niveaux 0, 1, ..., p, de sorte qu'un objet du niveau n + 1 soit l'assemblage d'un système d'objets liés du niveau inférieur.

Enfin, pour décrire les changements qui interviennent au cours du temps dans un système naturel, on a introduit la notion de *système évolutif* (EV1, §6) : à chaque instant t considéré (t est un nombre réel positif), l'état du système est représenté par une catégorie K_t ayant un objet 0 (qui figure les objets qui ont «disparu» en t) ; et le changement entre t et un instant postérieur s est modélisé par un foncteur «transition» entre les états K_t et K_s.

3. Les champs des agents et leur paysage

Modéliser un système naturel par une catégorie représentant ses composants et leurs interconnexions suppose que l'on dispose d'une information complète. Mais en pratique, un système est souvent connu par l'intermédiaire d'agents, qui sont certains composants du système ; il pourra s'agir par exemple d'un échantillon de population dans un système biologique ou social, d'organes récepteurs ou de commandes dans une machine. La première approche pour étudier les interactions entre le système et ces agents consistera à décrire les informations partielles sur le système qui peuvent être recueillies «de l'intérieur», à leur niveau, et à mesurer l'erreur commise en s'y restreignant.

Nous partons donc d'une catégorie K, qui représente l'état du système global, et d'un système G d'objets liés de K, appelés les agents, qui modélise la population considérée.

A. Le champ d'un agent

Ce champ correspond à la représentation interne (plus ou moins déformée) du système global qu'un agent particulier A pourrait construire à partir des seules données qui lui sont accessibles. Par exemple, dans un écosystème un animal ne connaît que son «Umwelt» (au sens de Uexküll), dans lequel il risque de ne pas voir un prédateur, ou de le distinguer seulement de manière indirecte par ses traces. Dans un organisme, un leucocyte ne reconnaît un pathogène que sous l'aspect d'un motif particulier de l'antigène présenté par une cellule T.

Pour modéliser cette situation, nous introduisons l'idée qu'un objet B du système K ne sera observable pour A que par ses effets sur A, représentés par les liens b de B vers A dans la catégorie K elle-même ; on appellera un tel b un *aspect pour* A. Un objet qui n'a pas d'aspect pour A n'interviendra pas dans le champ ; et il ne sera pas possible de distinguer à l'intérieur du champ si deux aspects différents proviennent ou non d'un même objet de K. De même, un lien entre deux objets B et C du système complet ne déterminera un lien entre leurs aspects b et c que s'il définit une corrélation entre ces aspects dans K.

D'une manière précise, le *champ* de A sera la catégorie, notée K/A, ayant pour objets les aspects pour A (c'est-à-dire les liens b : B $\rightarrow$ A), et pour liens de b vers c : C $\rightarrow$ A les liens f entre les objets B et C dans K tels qu'en combinant f avec c on retrouve b ; la combinaison de tels liens se fait comme dans K. On en déduit un *foncteur base* de K/A vers K associant B à l'aspect b.

Le champ donne une description du système vu à travers le «filtre» constitué par l'agent A ; remarquons bien qu'on ne conserve que la structure de catégorie du champ en «oubliant» comment il a été construit : l'aspect b, vu à l'intérieur du champ, ne permet pas de retrouver l'objet B dont il est l'aspect. Le foncteur base, quant à lui, nécessite d'avoir à la fois des informations internes au champ et externes à celui-ci (donc inaccessibles pour A) ; et il mesure l'erreur commise en remplaçant le système global par le champ.

B. Relations entre champs

Bien que le champ de chaque agent lui soit spécifique, les liens entre agents dans la population considérée permettent de relier ces champs. Par exemple, des animaux dans un écosystème pourront s'informer de la présence d'un prédateur par des cris appropriés.

Dans notre modèle catégorique, si A et A_1 sont deux agents liés par α dans la population G, ce lien spécifique définit une corrélation entre leurs champs : en combinant avec α un aspect b pour A, on obtient un aspect $b\alpha$ pour A_1, et les liens entre deux aspects sont conservés par cette corrélation. On définit ainsi un foncteur appelé *communication* entre le champ de A et le champ de A_1. Ce foncteur peut identifier ou oublier divers aspects. En théorie du codage, le nombre d'aspects identifiés ou omis mesurerait la défectuosité du canal α entre l'émetteur A et le receveur A_1, et le problème est de la minimiser.

Les communications entre agents sont compatibles avec l'intervention d'agents intermédiaires : si $\alpha : A \to A_1$ est combiné avec un lien $\alpha' : A_1 \to A_2$, la communication via le composé $\alpha\alpha'$ peut aussi se faire en communiquant b d'abord via α, d'où $b\alpha$, puis en communiquant $b\alpha$ via α'.

En considérant les différents liens spécifiques de la population G, on obtient ainsi un système lié de catégories formé des champs de chaque agent et des foncteurs communications entre eux ; on l'appelle la *fibration des champs*.

C. *Le paysage*

La fibration des champs regroupe et compare les modèles du système global construits «en parallèle» à partir des différents agents, et elle contient toutes les informations accessibles au niveau de la population. De même qu'une scène de cinéma est la synthèse de vues prises sous différents angles par plusieurs caméras, le paysage des agents sera la catégorie obtenue par synthèse des différents champs corrélés par les foncteurs communications ; il fournira une analyse complète de la situation au niveau de la population et, à ce niveau, il ne peut pas être distingué du système lui-même. Cependant, de l'extérieur, on pourra constater que ce paysage n'est pas un modèle fidèle du système, et mesurer la distorsion entre les deux (par un foncteur).

Abstraitement, le *paysage* sera la catégorie limite (dans la catégorie Cat des catégories et foncteurs) du système lié de catégories constitué par la fibration des champs. Nous allons en donner une description explicite, qui permet de mieux comprendre ce qu'il représente (cf. Appendice).

Pour définir ses objets, qu'on appellera *perspectives*, on cherche tous les aspects dans les différents champs qui, au niveau de la population globale (mais pas toujours au niveau d'un agent particulier), peuvent être

reconnus comme aspects d'un même composant du système global ; l'idée (adaptée de la définition d'une «chose» pour B. Russell) est d'identifier tous ces aspects. Ainsi deux aspects b et b' seront identifiés s'ils sont corrélés directement par un foncteur communication (donc si b' est le composé $b\alpha$ de b avec un lien spécifique α entre agents) ou, plus généralement, s'ils sont indirectement corrélés par un zig-zag de tels foncteurs. En termes plus mathématiques, la perspective pb de l'aspect b sera formée de tous les aspects b' pour lesquels il existe un zig-zag

$$\begin{array}{ccccccccc} & \alpha_1 & & \alpha'_1 & \alpha_2 & & \alpha_n & & \alpha'_n \\ A & \longrightarrow & \cdot & \longleftarrow & \cdot & \longrightarrow \cdots\cdots & \longrightarrow & \cdot & \longleftarrow A' \end{array}$$

de liens spécifiques entre agents et une suite $b_1, \ldots, b_n$ d'aspects de sorte que

$$b\alpha_1 = b_1\alpha'_1, \ldots, b_{n-1}\alpha_n = b'\alpha'_n$$

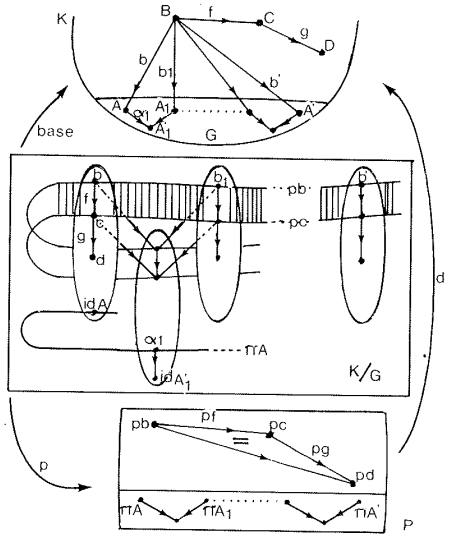

Figure 1.
Fibration des champs K/G et paysage P de la population G d'agents. La zone hâchurée représente la perspective pf du lien f : b → c entre aspects.
p = foncteur perspective,
d = foncteur distorsion.

La perspective d'un lien entre les aspects b et c est définie de même, et elle détermine une flèche dans le paysage entre les perspectives pb et pc. Comme la combinaison des liens entre aspects dans les différents champs est respectée par les communications, on en déduit une combinaison des perspectives de liens, de sorte que le paysage devient une catégorie, disons P ; et l'on a un *foncteur perspective*, p, des champs vers ce paysage.

Par ailleurs les foncteurs bases des champs vers le système K, qui mesurent l'erreur dans la description introduite par le passage aux champs, se recollent en un foncteur *distorsion*, d, du paysage P vers K.

D. Propriétés du paysage

Le paysage est un modèle du système complet K tel qu'il apparaît au travers du filtre de la population globale, et le foncteur distorsion de P vers K mesure l'erreur commise en se restreignant à ce modèle. Par exemple, si un organisme est étudié au seul niveau moléculaire, des phénomènes macroscopiques relatifs aux organes ne pourront pas être pris en compte dans ce paysage. Nous allons indiquer plus précisément (et prouver dans l'Appendice) en quoi cette distorsion ne peut être observée au niveau des agents, du moins à un instant donné (mais ses conséquences pourront la dévoiler plus tard à ce niveau même) :

– La population des agents peut être reconnue sans erreur dans le paysage. En effet, si A est un agent, son identité dans la catégorie K se retrouve comme un aspect particulier du champ de A, appelé le Soi de A ; cet aspect est caractérisé comme objet final du champ (ceci signifie que tout autre objet lui est lié par une et une seule flèche). La perspective πA du Soi de A ne contient pas le Soi d'un autre agent, et donc représente l'agent tel qu'il est vu à l'intérieur du paysage. Les liens spécifiques entre agents sont aussi représentés fidèlement dans P, de sorte que la population peut être considérée comme un système d'objets liés non seulement dans K mais aussi dans P. Et l'on montre que le champ de A, ou plus précisément de πA, dans le paysage s'identifie à son champ dans le système K.

– Le paysage constitue une description du système donné K dans le langage de la population G. Mais il peut y avoir d'autres systèmes, disons K', donnant le même paysage pour cette population. En particulier le plus petit système dans lequel les agents ont la même fibration des champs que dans K est le paysage lui-même, ce qui caractérise donc ce paysage (par une propriété universelle).

– La complexité d'un objet S de K peut être reconnue dans le paysage, à condition qu'il soit observable par au moins l'un des agents (cf. le théorème sur les limites de perspectives dans l'Appendice). On en déduit que, si K est un système hiérarchique, il en est de même pour les champs et pour le paysage (mais éventuellement avec moins de niveaux). – Par contre une perspective peut être un objet complexe du paysage, sans que l'objet correspondant dans K soit complexe : le foncteur distorsion ne préserve pas toutes les limites.

– Un changement de système K, représenté par un foncteur de K vers une autre catégorie, se répercute aux champs et au paysage. Par suite si l'on part d'un système évolutif et d'une population qui en définit un sous-système évolutif, les paysages correspondants à chaque instant formeront eux-mêmes un système évolutif.

4. Affinement de l'analyse par adaptations successives

Un organisme se développe, puis maintient son homéostasie au cours du temps par absorption d'éléments extérieurs, excrétion ou décomposition de certains de ses composants, synthèse de nouveaux constituants. Pour modéliser cette situation, nous avons décrit dans (EV1, §6) un schéma d'évolution par étapes pour un système évolutif, dans lequel le passage d'une étape à la suivante se fait par un processus d'engendrement par addition, suppression, assemblage ou désassemblage de composants. De manière précise, sur la catégorie représentant l'état du système à un instant t, on choisit une *stratégie* consistant en : éléments externes «à absorber», objets de la catégorie «à détruire» (ils devront devenir 0), systèmes d'objets liés «à assembler» (on leur ajoutera une limite), objets complexes «à décomposer» (on supprimera la limite de leur organisation interne). L'état du système à l'instant suivant sera obtenu par application de cette stratégie, et le *Théorème de Transition* (EV1, §6) indique comment est construite la catégorie où les buts de cette stratégie sont remplis de la manière la plus économique. Remarquons que la construction est analogue à la manière dont une image, en vision artificielle, est reconstruite à partir de traits primitifs (lignes, angles,...) et de règles d'engendrement.

Dans cette section, nous allons adapter ce schéma dans le cas où une population d'agents a été distinguée, pour analyser l'interaction dynamique entre les agents et le système global. Nous en déduirons une méthode générale d'apprentissage «par essais et erreurs», qui décrit la manière dont les agents réagissent par adaptation progressive aux contraintes internes et externes (organisme, ...), ou permet d'apprendre à un système (tel robot ou un système neuronal) à exécuter des tâches de plus en plus complexes.

Le rôle des agents à chaque étape de l'évolution du système sera traduit par le choix d'une stratégie sur les champs et sur le paysage. Ce choix est fait en anticipant ce que devrait devenir le paysage après application de la stratégie. Mais en fait la stratégie n'ayant pas été choisie sur le système lui-même (inaccessible au niveau des agents), il peut y avoir inadéquation entre les résultats «réels» et les buts fixés par ces agents,

engendrée par la distorsion entre le paysage et le système. Il en résultera une différence entre le paysage anticipé et le paysage effectivement obtenu à l'instant suivant ; toutefois, celle-ci pourra être mesurée au niveau même des agents (modélisée par le foncteur «comparaison»), ce qui permettra d'obtenir une meilleure connaissance du système à ce niveau, et par suite d'améliorer les performances ultérieures. Penser par exemple aux déséquilibres que l'homme peut involontairement produire dans un écosystème et qu'il doit ensuite corriger.

A. *Le paysage anticipé*

Le système sera représenté par un système évolutif et la population d'agents par un sous-système évolutif. Dans cette section, nous considérons à un instant donné t, la catégorie K_t état du système, et le sous-système formé par les agents et leurs liens spécifiques ; on en déduit la fibration des champs et le paysage P_t.

On appellera *stratégie d'agents* la donnée d'une stratégie sur chaque champ et, éventuellement, d'une stratégie sur le paysage indiquant des modifications concernant la population (exemple : supprimer des agents, ou en rajouter). Le paysage anticipé qui motive le choix de cette stratégie est décrit dans le théorème suivant (prouvé dans l'Appendice).

Théorème du paysage anticipé : Etant donné une stratégie d'agents Σ, le paysage P_t se plonge dans «une plus petite» catégorie P^*_t, appelée le *paysage anticipé*, vérifiant les conditions suivantes :

– les buts fixés par Σ sont vérifiés dans la fibration des champs des agents (éventuellement modifiés selon Σ) dans P^*_t ; et le paysage déduit de cette fibration s'identifie à la catégorie P^*_t elle-même.

L'idée est de modifier d'abord chaque champ selon sa stratégie propre ; cette opération (qui applique le Théorème de transition dans chaque champ) se fait «en parallèle» pour les différents agents. Mais si les stratégies relatives à deux agents liés ne sont pas compatibles (buts conflictuels), les foncteurs communication ne pourront pas s'étendre aux champs ainsi modifiés ; il devra alors y avoir échange d'informations relativement aux nouveaux champs, conduisant à une nouvelle modification ; et ce processus est éventuellement répété jusqu'à obtention d'une fibration de champs, dont le paysage sera le paysage anticipé. C'est bien ainsi que, par exemple, se propage une nouveauté culturelle dans une société humaine, ou même dans une société animale, comme le lavage des patates dans une société de singes japonais (Cyrulnik, 1983).

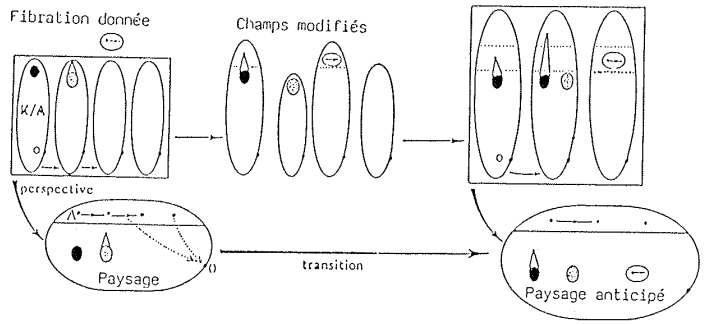

Figure 2. Construction du paysage anticipé par modification des champs individuels, puis échange d'informations pour obtenir une fibration.

Formellement, le paysage anticipé est construit en appliquant le Théorème de Transition au paysage donné P_t muni de la stratégie Σ' qui regroupe les stratégies sur les différents champs (cf. Appendice). Insistons bien sur le fait que nous obtenons une description explicite de ce paysage anticipé. En particulier on ajoute à P_t, pour chaque système d'objets liés «à assembler» (d'après Σ'), un nouvel objet complexe représentant leur assemblée et qui en deviendra la limite (dans P^*_t). Mais l'intérêt de la méthode consiste en ce qu'on sait ainsi définir les liens appropriés entre deux telles assemblées, ce que ne permettent pas les analyses plus classiques ; ils correspondent aux familles de liens individuels entre les composants qui sont corrélés par les liens spécifiques à la structure de chaque assemblée, de sorte que les signaux issus du premier coopèrent à l'aide des liens internes du second et rétroagissent pour construire des liens plus forts entre les deux (construction d'un faisceau maximal, cf. EV1) ; ainsi un tel lien définit une sorte de résonance entre les deux objets complexes.

B. *Comparaison entre le paysage anticipé et le paysage effectif*

Nous avons vu que la stratégie des agents a été choisie en ne tenant compte que des informations accessibles à la population. De plus, des circonstances externes à la population peuvent aussi agir sur le système. Il en résulte que le nouveau paysage des agents dans le système modifié sera probablement différent du paysage anticipé, et nous allons mesurer leur différence.

Considérons le foncteur transition, dans le système évolutif, entre les états au début t et à la fin t' de l'étape, c'est-à-dire entre K_t et le système modifié $K_{t'}$. La stratégie d'agents est répercutée à K_t par le foncteur

distorsion entre le paysage P_t et K_t, puis à $K_{t'}$ via le foncteur transition. L'interaction des agents avec le système se traduit par le fait que les buts de la stratégie ainsi obtenue sont remplis dans $K_{t'}$. Du fait que le paysage anticipé a été construit de la manière la plus économique possible, on déduit :

Théorème de comparaison. Le foncteur composé

$$P_t \xrightarrow{\text{distorsion}} K_t \xrightarrow{\text{transition}} K_{t'}$$

se factorise en un foncteur du paysage anticipé vers $K_{t'}$, qui détermine un foncteur *comparaison* entre le paysage anticipé et le paysage «effectif» des agents dans le système modifié $K_{t'}$.

Le foncteur comparaison est explicitement construit à partir des seules données accessibles au niveau de la population considérée. C'est un isomorphisme si les buts fixés sont «réellement» atteints. Sinon, il permet aux agents de mesurer, après coup, l'erreur commise en évaluant l'effet de la stratégie sur le système, et il servira à choisir ultérieurement une stratégie mieux adaptée au but recherché. Par exemple, dans un modèle de système neuronal avec propagation rétrograde (au sens de Hinton, cf. North, 1987), la mesure de ce foncteur correspondrait à la différence entre les outputs voulus et les outputs obtenus, laquelle est utilisée pour améliorer l'apprentissage du système.

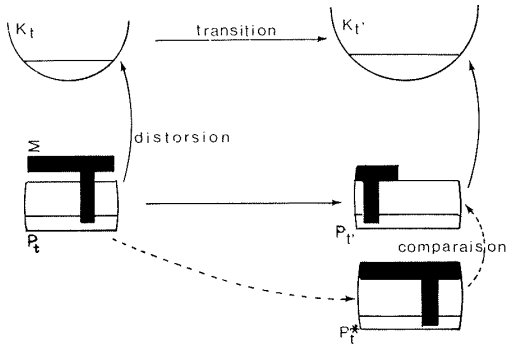

Figure 3.
En t, stratégie Σ' sur P_t. En t', mesure de la différence entre le paysage anticipé $P^*_{t'}$ et le paysage effectif $P_{t'}$ par le foncteur comparaison (lequel, ici, n'est pas un isomorphisme, les buts n'étant pas atteints).

C. Modèle d'apprentissage par essais et erreurs

En itérant l'opération précédente, on modélise un processus de modifications successives d'un système, sous l'effet d'une population d'agents donnée. Ce processus sera exposé dans le cadre catégorique général afin de pouvoir l'appliquer aux situations les plus variées.

On représente le *temps* par une suite (finie ou infinie) d'instants, la seule condition sur cette suite étant que chaque instant t ait un suivant, ou soit le dernier, et qu'il y ait un instant «initial» 0.

L'état du système et de la population étant donnés à l'instant initial, leurs états aux instants successifs sont décrits par récurrence, le passage entre l'instant t et son suivant t' étant modélisé comme suit :

– Une stratégie d'agents Σ est choisie sur les champs et le paysage en t (on n'étudie pas ici le difficile problème du choix d'une stratégie «optimale»). On en déduit le paysage anticipé (cf. §A) et la nouvelle population en t'.

– La stratégie se répercutera en une stratégie dΣ sur le système K_t en t, par le foncteur distorsion (entre le paysage en t et K_t). Pour modéliser le fait que les agents sont l'un des facteurs de l'évolution du système, on demande seulement que les buts fixés par dΣ deviennent vérifiés dans le système $K_{t'}$ en t'.

– Le paysage anticipé est comparé au nouveau paysage effectif dans $K_{t'}$, via le foncteur comparaison, au niveau des agents (cf. §B). Si ce foncteur est un isomorphisme, les buts fixés ont été atteints, et de nouveaux buts pourront être choisis à l'étape suivante. Sinon, la situation avait été mal appréhendée et la stratégie qui sera choisie en t' devra tenir compte de l'erreur résiduelle mesurée par ce foncteur.

Remarquons que ce modèle recouvre des cas très divers, car il y reste une grande latitude de choix. En particulier si l'évolution du système est entièrement contrôlée par les agents, on prendra le paysage anticipé lui-même pour nouvel état du système à chaque étape. Dans tous les cas, les paysages anticipés aux différents instants forment un système évolutif, lié au système évolutif des paysages «effectifs» par les foncteurs comparaisons successifs.

Ce processus peut être interprété comme une méthode d'apprentissage «par essais et erreurs» : les essais correspondent aux choix des stratégies successives et à leur mise en œuvre, et l'erreur est évaluée à chaque étape par le foncteur comparaison entre le paysage anticipé et le paysage effectif dans le nouveau système. Il s'appliquerait aussi dans un cadre plus épistémologique : développement d'une théorie par retouches successives ; dévoilement partiel du «monde réel voilé» (au sens de d'Espagnat), à l'aide d'expérimentations ; déploiement progressif de «l'ordre impliqué» au sens de Bohm.

5. Application du modèle précédent aux systèmes naturels

Dans le modèle d'apprentissage décrit ci-dessus, le «temps» est juste représenté par la suite d'instants donnée, donc par son ordre discret. Mais pour des systèmes naturels, il s'agira du temps «réel», de sorte que les instants sont des nombres réels positifs et la durée des étapes va jouer un rôle essentiel.

Cette durée sera selon le cas déterminée par les circonstances, une nouvelle étape étant entamée dès qu'un certain seuil de tolérance d'erreurs est dépassé au niveau des agents (mesuré par le foncteur comparaison) ; ou fixée d'avance (exemples : rythmes biologiques, planification sociale). Par exemple, on pourra approcher une évolution continue en prenant des étapes de durée inférieure à la précision des horloges utilisées.

A. Durée de latence et durée d'une étape

Les différentes opérations qui, à chaque étape, sont effectuées pour modifier le système nécessitent une certaine durée. Par exemple la synthèse d'une protéine résultera d'une suite de réactions chimiques non instantanées. On appellera *durée de latence* d'une stratégie d'agents le temps minimum requis pour son choix et sa mise en œuvre sur les champs (operation-lag au sens de R. Rosen, 1958), l'échange d'informations entre agents et sa répercussion au système (transport-lag pour Rosen).

L'évolution du système en temps réel se présentera de façon très différente selon le rapport entre la durée $T = t' - t$ de l'étape allant de l'instant t à son suivant t', et la durée de latence S de la stratégie Σ choisie en t.

1° $S = T$: une nouvelle étape débutera dès que la stratégie a été mise en œuvre. Dans le cas où les buts fixés par Σ ne sont pas atteints (le foncteur comparaison n'est pas un isomorphisme), il faudra en tenir compte dans le nouveau choix en t'. Si les buts sont atteints, un choix possible en t' est de maintenir l'état présent tant qu'il n'est pas modifié par des perturbations externes.

2° $T < S$: la mise en œuvre de la stratégie dépasse la durée de l'étape, soit que celle-ci ait été fixée d'avance, soit que des perturbations externes imposent aux agents un nouveau choix (nous en verrons un exemple au §6). A la fin t' de l'étape, le système présente un déséquilibre, que le nouveau choix cherchera à compenser.

3° $T > S$: plusieurs configurations sont possibles :

– Si le foncteur comparaison est un isomorphisme, une fois la stratégie mise en œuvre, la description qu'on aura du système au niveau de la population (donc le paysage) restera stable pendant une durée de T–S. Mais le système lui-même peut subir des modifications non répercutées aux agents, qui rendront en fait le paysage de moins en moins fidèle ; jusqu'au moment où l'accumulation d'erreurs sera assez importante pour se manifester au niveau des agents (le foncteur comparaison cessant d'être un isomorphisme), et leur imposer de choisir une stratégie différente, ce qui initiera une nouvelle étape. Il apparaîtra ainsi une «*fracture*» dans le paysage, après une période de stabilité. En particulier si, à chaque étape, S est négligeable devant T, on aura un «équilibre ponctué», avec de longues périodes d'équilibre délimitées par des fractures (exemple : brisures de symétrie pendant la morphogénèse).

– Si le foncteur comparaison n'est pas un isomorphisme, une nouvelle sous-étape pourra être initiée pour corriger l'erreur, et cette opération éventuellement répétée plusieurs fois jusqu'à mise en œuvre correcte de la stratégie Σ choisie en t, ou, comme plus haut, jusqu'à ce qu'un changement d'étape soit imposé de l'extérieur. C'est la situation des systèmes biologiques qui doivent sans cesse se modifier pour maintenir leur homéostasie.

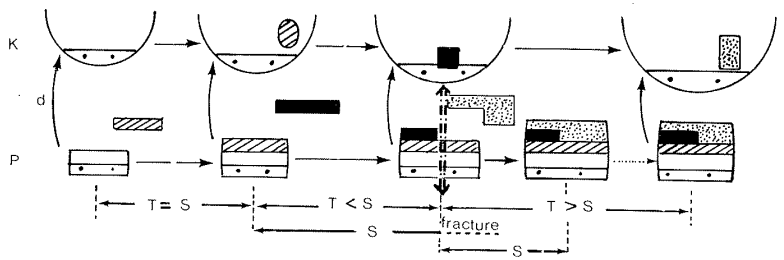

Figure 4. Différentes configurations possibles d'une étape de durée T selon la durée de latence S de la stratégie choisie (cf. texte).

B. Microévolution et macroévolution

Jusqu'ici nous avons étudié l'interaction du système et d'une population particulière d'agents. Mais plusieurs populations, par exemple de divers niveaux de complexité, peuvent interagir avec le système, et par suite entre elles. Ainsi l'évolution d'un organisme dépend à la fois de

phénomènes moléculaires et de l'action conjuguée de systèmes plus complexes (système hormonal, immunitaire,...). Il sera intéressant de comparer les paysages relatifs à deux populations différentes, et leurs influences réciproques sur l'évolution, une pluralité de vues conduisant à une connaissance plus exacte du système lui-même.

Nous considérons donc, dans un système évolutif hiérarchique modélisant un système naturel, une population d'agents de niveau n et une population d'agents plus complexes, appelés respectivement les *microagents* et les *macroagents*. On suppose, comme le suggèrent les exemples, que la durée de latence des macroagents est beaucoup plus grande que celle des microagents.

Un macroagent A' a une organisation interne formée d'objets A_i du niveau n, qui détermine entièrement ses liens aux autres composants du système, donc son comportement à un instant t. Le champ de A' comporte à la fois des aspects provenant du paysage de ses composants A_i et des aspects plus «globaux», qui ne sont pas médiatisés par le niveau n (cf. Appendice, §A). Ceux-ci vont aussi peser sur le choix des stratégies des macroagents et peuvent entraîner un conflit entre leurs stratégies et celles des microagents. Ainsi à la fois les paysages, les échelles de temps, et les stratégies seront différents pour les deux populations, conduisant à deux modèles distincts (bien qu'interdépendants) d'évolution du même système.

Voyons comment la microévolution est décrite dans le langage des macroagents. Leur durée de latence étant très grande par rapport à celle des microagents, à leur niveau les changements entre microétapes ne se distinguent pas individuellement (sauf de manière plus ou moins chaotique), et le changement global sur plusieurs microétapes semble avoir été obtenu par une variation continue du système sur toute leur durée. Mais cette approximation continue de la microévolution discontinue deviendra de moins en moins précise, jusqu'au moment où l'erreur est mesurable par le foncteur comparaison au niveau des macroagents. Il en résulte une fracture dans le macropaysage, qui force les macroagents à changer de stratégie, donc à inaugurer une nouvelle macroétape ; leur nouvelle stratégie peut, par contre coup, imposer aussi un changement de stratégie aux microagents, d'où une fracture du micropaysage (cf. exemple §6).

Ainsi la macroévolution est décrite sous forme de longues étapes pendant lesquelles le changement est continu, séparées par des fractures pour compenser les erreurs dues à cette description. Ceci peut être vu comme un modèle mathématique remplissant le programme proposé par R. Rosen d'approcher un système complexe par des systèmes simples localement et

temporairement (ici pendant une macroétape), en changeant d'approximation (fracture) «when the discrepancy becomes intolerable» (Rosen, 1985, p. 193). A chaque macroétape, le nouveau paysage est déduit de l'ancien par adjonction ou destruction d'objets plus ou moins complexes selon la stratégie des macroagents, et sa construction explicite (par le Théorème du paysage anticipé , §4) montre en quel sens «every object in the big category can be regarded as a limit of elements in the small one» (Rosen, 1985, p. 196). Remarquons que, pendant une macroétape, la même évolution apparaît continue pour les macroagents et discontinue pour les microagents : la continuité d'un phénomène n'est donc pas une propriété intrinsèque, mais dépend des observateurs.

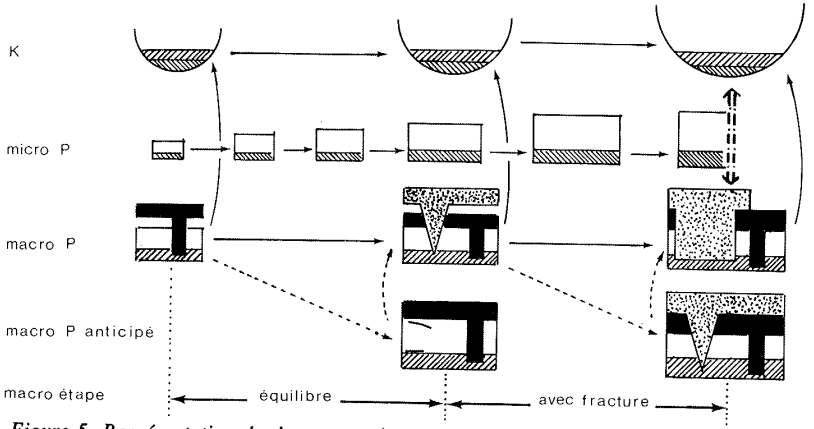

Figure 5. Représentation de deux macroétapes, continues pour les macroagents, mais divisées en plusieurs microétapes. La seconde conduit à une fracture, qui sera ensuite répercutée au niveau des microagents.

On peut préciser ceci dans les applications où l'état du système est décrit au niveau des macroagents de manière quantitative à l'aide d'observables variant au cours du temps (exemples : nombre d'éléments d'une population, concentration de tel produit, ...), ce qui permet de transporter l'étude du paysage et des stratégies dans un espace numérique ou une variété (cf. EV1, §7) ; dans ce cas, le foncteur comparaison peut aussi être quantifié. Pendant une macroétape, ces observables auront une variation continue, souvent comme solutions d'équations différentielles dépendant de certains paramètres. La fracture qui détermine la fin de la macroétape se traduira par une singularité (ou catastrophe au sens de Thom, 1974), et le changement de stratégie consécutif par un changement des paramètres, d'où une nouvelle approximation pour la macroétape suivante.

C'est en fait l'approximation continue d'une macroétape entre deux fractures que décrivent la plupart des modèles mathématiques utilisés en Biologie, Ecologie, Sociologie, ..., les macroagents étant alors des classes de molécules, cellules, individus, ... d'un certain type ; ils ne permettent donc pas de comparer les descriptions relatives à des niveaux différents (voir cependant Auger, 1986).

6. Un exemple en Biologie

L'exemple suivant n'apporte pas de contribution originale en Biologie ; il a pour seul but d'illustrer les principales idées de notre modèle dans un cas concret. Il est traité de manière informelle, mais la description précise des catégories et des stratégies qui y interviennent ne présente pas de difficulté.

A. Résultats expérimentaux

Rappelons quelques uns des mécanismes de *réplication et réparation* de l'ADN d'une bactérie, telle que *E. Coli* (cf. Pritchard, 1978).

Les deux chaînes formant l'ADN sont répliquées séparément et simultanément, base après base. La réplication est déclenchée par l'activation de gènes régulateurs, dépendante des réserves d'énergie et de la concentration de certaines protéines. Elle est dirigée par l'ADN-polymérase (ADN-p) qui se fixe sur la base à répliquer, tandis que la protéine « Single-Stranded-Binding » (SSB) se fixe sur les bases suivantes pour séparer les deux chaînes à ce niveau.

La réplication exige un appariement correct des bases. Mais divers facteurs externes (chaleur, alkalysants, ultraviolets) peuvent causer des lésions à l'ADN ; la plupart de celles-ci sont éliminées de manière efficace par un ensemble d'enzymes de réparation «patrouillant» sur l'hélice d'ADN pour corriger une base défectueuse ; ou exciser en plusieurs pas une région lésée plus étendue d'une des chaînes et la resynthétiser par copie sur la seconde chaîne correcte.

Cependant, si les lésions chromosomiques sont trop importantes, ces simples systèmes de réparation sont débordés et la réplication normale de l'ADN est bloquée. Dans ce cas la mort cellulaire est évitée par l'intervention d'un système complexe, appelé le *système SOS* (Radman, 1975), qui permet la poursuite de la réplication. Ce système, formé de plusieurs gènes qui contrôlent les inhibiteurs de la réplication et une variété

d'activités de réorganisation de l'ADN, est normalement réprimé par la protéine LexA (Little & Mount, 1982). Quand la réplication est bloquée par une lésion, des signaux moléculaires (probablement dépendants de la quantité de SSB liée à l'ADN, cf. Moreau, 1985) activent la protéine RecA qui, formant un triple complexe avec l'ADN lié à SSB, déréprime le système SOS en scindant son répresseur (LexA). Un des gènes (umu) du système SOS induit un saut de l'ADN-p pour reprendre la réplication normale au-delà de la lésion (Maenhaut-Michel, 1985), tandis que d'autres concourent à la réplication avec erreur de la partie endommagée. Ensuite, la quantité de RecA diminue, d'où une accumulation de LexA qui va à nouveau réprimer le système SOS. L'erreur conduira par la suite à une mutation dans l'une des cellules filles.

B. Représentation catégorique

La bactérie sera représentée par un système évolutif dont les objets de niveaux de complexité successifs sont : les ions ; des molécules ou assemblages d'ions ; des macromolécules telles l'ADN et certaines de ses parties (opérons, système SOS) ou des populations de protéines ; enfin la cellule elle-même. Les liens entre ces objets représentent leurs interactions au sein de la cellule.

Prenons d'abord pour (micro)agents les gènes, qui gouvernent la synthèse des protéines. La phase de réplication leur est imposée par des phénomènes globaux qui les activent ; elle se déroulera en plusieurs (micro)étapes, chacune correspondant à une stratégie de copie et vérification des bases, ou de réparation.

Ainsi pour répliquer la n-ième base, plusieurs agents doivent modifier leur champ : assemblage d'ADN-p avec la base n et les molécules voulues pour la répliquer ; assemblage de protéine SSB avec les bases suivant n ; assemblage des enzymes correcteurs avec les parties d'ADN qu'ils vont patrouiller, ... La mise en œuvre de ces stratégies dans les champs s'effectue par une suite d'opérations (synthèse de protéines, ...) qui correspondent dans notre schéma à la phase de propagation des informations entre champs pour construire le paysage anticipé. Ceci fait, deux cas sont possibles :

– Si le foncteur comparaison est un isomorphisme, i.e., si la base n est correctement répliquée, la microétape suivante aura pour but d'assembler la nouvelle base obtenue aux bases déjà répliquées ; puis on passe à la base n + 1.

– S'il y a une erreur, le foncteur comparaison ne sera pas un

isomorphisme, et la stratégie suivante consistera à corriger les bases défectueuses, par l'action des enzymes correcteurs (si cela est possible), avant de passer à la base n + 1.

Par contre, si une importante lésion de l'ADN déborde ces systèmes de réparation ordinaires, à cet instant il n'y a plus de stratégie admissible pour les microagents, puisque le strict appariement des bases ne peut être respecté. La situation sera débloquée par le système SOS. Nous considérons donc une seconde population d'agents de niveau supérieur, les macroagents, qui seront des assemblages fonctionnels de gènes, tels des opérons ou le système SOS, et des populations de protéines (SSB, ou RecA, ...). Leur état se traduit en termes d'observables (taux de synthèse d'une protéine, concentration de telle population, ...).

Ce macroniveau avait imposé la stratégie de réplication aux microagents. En cas de blocage, tout se passe comme si les macroagents mesuraient la différence entre le paysage anticipé (d'après la stratégie de réplication), et le paysage effectif (impossibilité d'apparier les bases) : dans notre modèle le foncteur de comparaison à leur niveau n'est plus un isomorphisme. Et ils adoptent une nouvelle stratégie (changement de macroétape, après «fracture», cf. §5) pour permettre la reprise de la réplication par dérépression du système SOS : assemblage des fragments d'ADN liés à SSB pour former un complexe triple avec RecA, qui entraîne la scission de la protéine LexA (par désassemblage de ses composants), et donc la dérépression du système SOS. Après réparation, LexA, n'étant plus scindé, reviendra inhiber SOS (par assemblage avec son régulateur).

Cette stratégie des macroagents imposera par contre coup une fracture dans le micropaysage, car une nouvelle stratégie d'agents doit y être adoptée avant que la précédente ait été mise en œuvre. En effet, elle entraîne une modification parmi les microagents en activant les gènes du système SOS (stratégie modifiant les agents, dans la construction du (micro)paysage anticipé), et les champs des nouveaux microagents devront s'adapter à la reprise de la réplication au-delà de la lésion (par assemblage d'ADN-p avec une base n + k) et à la réplication avec erreur de la partie endommagée à l'aide de produits du système SOS. Ensuite, les microagents reprendront une simple stratégie de réplication, mais au prix de modifications structurelles.

C. Comparaison des niveaux

Considérant maintenant la cellule elle-même comme un agent, au niveau encore supérieur d'une population cellulaire (où les résultats

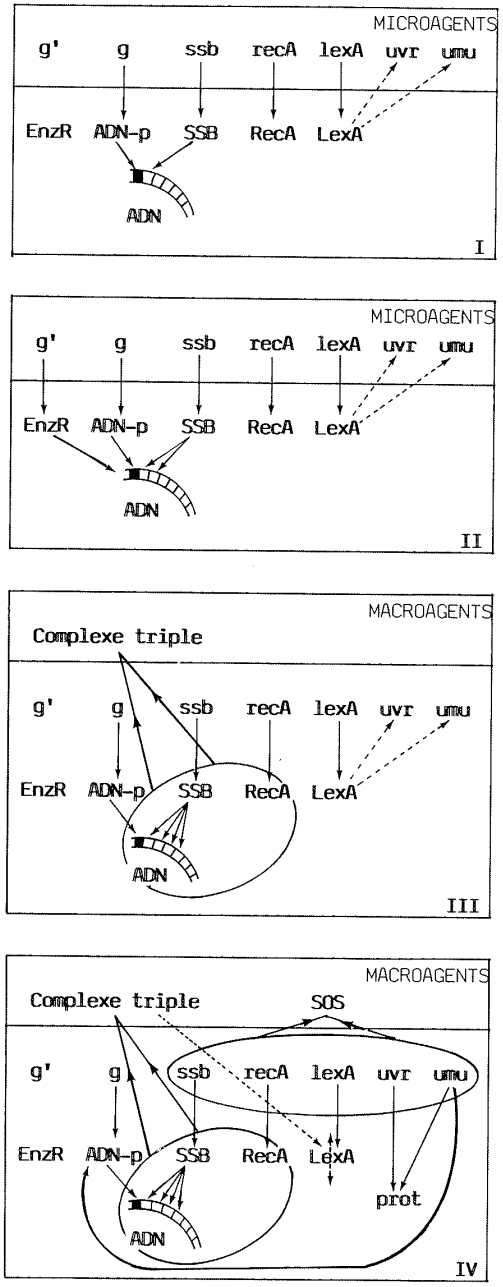

Figure 6.

1° *Paysage des micro-agents (les gènes) :*

I. *Dans le cas d'une stratégie de simple réplication, dirigée par l'ADN-polymérase (ADN-p, de gène g) ; les bases suivant la base répliquée sont couvertes de SSB. Le système SOS réprimé n'apparaît pas.*

II. *Dans le cas où une erreur est corrigée par des enzymes de réparation (EnzR, de gène g').*

2° *Paysage des macro-agents lorsqu'une lésion importante impose une fracture :*

III. *Un complexe triple se forme par liaison de RecA avec l'ADN recouvert de SSB. Ce complexe concourt à la scission des molécules de LexA, ce qui déprime le système SOS.*

IV. *L'activation de SOS impose une nouvelle stratégie aux microagents ; les produits de certains de ses gènes (tels umu et uvr) permettent : un saut de l'ADN-p pour reprendre la réplication au-delà de la lésion, et la réplication avec erreur de la partie lésée.*

expérimentaux sont le plus scuvent obtenus), on voit que cette stratégie permet de préserver son homéostasie, au moins durant quelques étapes de son évolution, les mutations éventuelles ainsi engendrées ne causant pas de fracture de son paysage.

Au total, selon les agents, le cycle de réplication se décompose en un nombre fini d'étapes comme suit :

a) *Pour les microagents :*

Réplication d'une base et vérification (→ Réparation éventuelle)

→ Extension des chaînes répliquées → Réplication d'une base suivante...

avec éventuellement fracture imposée par les macroagents entre l'étape de réplication et celle de réparation ; et ce jusqu'à la fin de la réplication de l'ADN.

b) *Pour les macroagents :* Une seule macroétape s'il n'y a pas de grave lésion, sinon : Réplication → Intervention de SOS → Réplication, avec fracture entre les deux premières. En termes d'observables, la macroétape correspond à un état orbitalement stable et la fracture à la transition entre deux tels états (au sens de Téodorova, 1985).

c) *Pour la cellule :* une seule étape de réplication, même avec lésion.

7. Conclusion

L'exemple précédent illustre bien le type d'interactions entre les descriptions d'un même système relatives à des populations de niveaux différents, qui interagissent sur l'évolution du système avec des stratégies éventuellement conflictuelles. Ainsi les modifications du niveau inférieur pendant plusieurs microétapes risquent d'entraîner une accumulation d'erreurs conduisant à une fracture au niveau supérieur. Inversement le besoin de stabilité d'un niveau supérieur peut imposer une stratégie plus ou moins coûteuse aux niveaux inférieurs, par exemple détruire certains microagents ou fracturer le micropaysage afin de préserver le macropaysage ; mais les conséquences de cette fracture pourront ultérieurement se répercuter aux niveaux supérieurs et entraîner des changements importants pour le système global. Comme si les besoins du système, imposés à ses composants malgré eux, avaient un effet de boomerang (par un «revers lifté») aux effets plus ou moins imprévisibles.

Plus philosophiquement, le modèle général d'évolution que nous avons décrit dans cet article peut s'interpréter comme suit :

– Sur un mode synchronique, un réductionnisme opératoire des niveaux supérieurs aux niveaux inférieurs. Celui-ci traduit l'émergence de propriétés pour un objet complexe considéré comme limite de son organisation interne (ses composants et leurs liens).

– Relativisé, sur un mode diachronique, par un «pouvoir hiérarchique», où le choix fait par les niveaux supérieurs, qui ont accès à des informations plus globales sur le système, pèse sur les stratégies que doivent adopter les niveaux inférieurs à l'étape suivante.

Cette situation ambivalente de réductionnisme tempéré par un contrôle holiste, qui pourrait être qualifiée d'*émergence rationnelle* au sens de Bunge (1979), semble omniprésente dans les domaines les plus variés, et a été en fait suggérée par des problèmes «réels» qui se posent dans l'étude de systèmes hiérarchiquement organisés en Biologie, Sociologie, Ecologie, ... En particulier en Neurosciences, les résultats précédents permettent de mieux comprendre l'interaction entre les simples neurones et les «assemblées» de neurones dont l'imagerie cérébrale a récemment mis en évidence le rôle prépondérant, et de modèliser un processus d'apprentissage pour un système neuronal (cf. Vanbremeersch et Ehresmann, 1988).

Toutefois on peut se demander si la valeur de ce modèle n'est pas plus heuristique et philosophique que pratique, de sorte qu'il serait «uncomfortably near the borderline of modelling for its own sake» (Maddox, 1987) ; ou ne vaudrait-il pas mieux dire restreint à son propre paysage ?

Appendice

Les principaux résultats mathématiques de l'article vont être précisés. Les démonstrations seront seulement esquissées, car elles ne présentent pas de difficulté pour le catégoricien, et des preuves «élémentaires» détaillées peuvent être trouvées dans une version préliminaire plus développée de cet article (Ehresmann-Vanbremeersch, 1987b). Pour les notions de base sur les catégories, nous référons à Ehresmann (1968) ou Mac Lane (1971).

A. Fibrations de champs et paysage

On appellera *fibration* sur G un foncteur F d'une catégorie G vers la catégorie Cat des catégories. Un morphisme entre une fibration F sur G et une fibration F' sur G' est défini par un foncteur γ de G dans G' et une

transformation naturelle de F vers le composé de γ avec F'. On appellera *fibration de champs* une fibration sur G isomorphe à la fibration des champs K/G relative à une surcatégorie K de G ; comme au §2, la fibration K/G associe à l'objet A de G son champ dans K qui est la catégorie K/A «des objets au-dessus de» A, et à la flèche $\alpha : A \to A'$ le foncteur communication.

Soit F une fibration sur G. Comme foncteur vers Cat, elle admet une limite (inductive). Dans le cas général, on sait (Ehresmann 1968, p. 111) que cette limite est la catégorie construite comme suit : On considère l'ensemble somme des «fibres» F(A), et sur celui-ci la relation reliant b dans la fibre F(A) à $F(\alpha)$ (b), si $\alpha : A \to A'$ dans G. Cette relation engendre une relation d'équivalence, dont les classes, encore appelées perspectives sont définies comme dans le cas particulier du §3. Sur l'ensemble de ces perspectives, on définit, par quotient à partir de la structure de catégorie des fibres, une structure de graphe et une composition pour certains couples de flèches consécutives (mais non tous ces couples, si F est une fibration quelconque) ; ce «graphe multiplicatif» sera appelé le paysage. La limite de F est la catégorie libre qu'il engendre.

Dans le cas où F est une fibration de champs, on montre que le paysage lui-même est une catégorie. Ceci résulte (Ehresmann 1968, p. 75) du fait que F vérifie alors la *condition de ruban* : Si $f : b \to c$ est une flèche d'une fibre et si c' est un objet dans la perspective de c, il existe exactement une flèche de but c' dans la perspective de f ; dans ce cas, F vérifie aussi la *condition du Soi* : chaque fibre F(A) a un objet terminal 1_A appelé le Soi de A, et la perspective πA de celui-ci ne contient pas d'autre Soi. Nous allons voir que, réciproquement, ces deux conditions caractérisent les fibrations de champs, et les propriétés du paysage énoncées au §3 en découlent.

Caractérisation des fibrations de champs. Une fibration F est une fibration de champs si et seulement si elle vérifie la condition de ruban et la condition du Soi. Dans ce cas, la limite de F est le paysage P construit ci-dessus. P contient une sous-catégorie πG isomorphe à G, la fibration des champs $P/\pi G$ est isomorphe à F et son paysage s'identifie à P. De plus tout morphisme de F vers une fibration de champs K'/G' détermine un foncteur de P vers K'.

La preuve est facile. Disons seulement que l'isomorphisme de G sur πG associe à A la perspective πA de son Soi 1_A et à $\alpha : A \to A'$ celle de l'unique flèche de $F(\alpha)$ (1_A) vers $1_{A'}$; et l'isomorphisme de F(A) sur le champ de πA dans P associe à un objet b de F(A) la perspective de l'unique flèche $b \to 1_A$.

Remarque. Philosophiquement, on peut interpréter une fibration F comme la donnée pour chaque agent A d'un «monde relatif» F(A), ces mondes étant assez homogènes pour que les agents puissent communiquer ; il se pose alors la question de savoir s'il existe toujours un «monde réel» dont tous ces mondes relatifs soient des visions particulières (ce que conteste le solipsisme). La caractérisation précédente signifie que ceci n'est vrai que si chaque agent reconnaît le Soi et le non-Soi (condition du Soi) et si l'échange d'informations entre agents est la plus large possible (condition de ruban) ; dans ce cas F est une fibration de champs et le «monde réel» commun aux agents est son paysage.

Limites de perspectives. Soit K/G une fibration de champs. Soit s un système d'objets liés s_i dans le champ K/A de A dont l'image S par le foncteur base a une limite S' dans K ; alors il admet une limite s' dans K/A et son image σ par le foncteur perspective admet la perspective de s' pour limite dans le paysage.

Preuve. Les $s_i : S_i \to A$ dans K forment un lien collectif de S vers A, qui se recolle en un $s' : S' \to A$; ce s' est la limite du système s. La deuxième affirmation s'en déduit en montrant, à l'aide de la condition de ruban, que, si l'on a un lien collectif (γ_i) de σ vers la perspective d'un $b : B \to A'$, alors σ et ce lien collectif se «relèvent» dans le champ de A' en un système d'objets liés qui a une limite, et en un lien collectif pour celui-ci dont le recollement a pour perspective le recollement des γ_i.

B. Théorème de paysage anticipé

Ici on part d'une fibration de champs K/G, dont le paysage est encore noté P. D'après la caractérisation ci-dessus, on peut identifier G à une sous-catégorie de P, et la fibration donnée à la fibration P/G des champs dans P. (Ceci pour bien spécifier que le résultat suivant ne dépend pas de la surcatégorie K de G, mais seulement de la fibration.) Nous supposons que G a un objet initial, noté 0, qui est aussi initial dans P, de sorte que chaque champ a un objet 0.

On se donne une stratégie sur chaque champ, et éventuellement une stratégie sur le paysage vérifiant les conditions suivantes : les objets «à absorber» doivent devenir des agents, et les systèmes d'objets liés à recoller : ou bien sont images par le foncteur perspective d'un système lié dans un champ, ou bien leur limite sera un agent. (Ceci est un peu plus général qu'une stratégie d'agents.) Nous désignons par Σ' la stratégie sur le

paysage qui réunit la stratégie donnée sur P et les stratégies images par le foncteur perspective des stratégies données sur les champs. En appliquant le Théorème de Transition (EV1, §6), on construit un foncteur «prospectif» τ de P vers une plus petite catégorie Pa dans laquelle les buts de Σ' sont atteints. On a alors :

Théorème. Avec les hypothèses précédentes, il existe un morphisme de K/G ($\approx$ P/G) vers «une plus petite» fibration de champs dans laquelle les buts des stratégies données sont atteints ; et son paysage (le «paysage anticipé») est la catégorie Pa définie ci-dessus.

Preuve. On prend pour agents dans Pa : les images des agents par le foncteur prospectif τ, et les nouveaux objets imposés par la stratégie sur P. On montre que leur fibration des champs Pa/Ga dans Pa sera la fibration cherchée, et que son paysage Q peut être identifié à Pa, car le foncteur distorsion da de Q vers Pa est un isomorphisme. En effet, on voit facilement, en utilisant les résultats du §A, que les buts de la stratégie image de Σ' par τ sont atteints dans Q. Par ailleurs le foncteur τ s'étend en un morphisme entre les fibrations P/G et Pa/Ga, d'où un foncteur τ' entre leurs paysages P et Q. Les buts de Σ' étant atteints dans Q, il résulte de la propriété «universelle» de Pa que τ' se factorise en un foncteur de Pa vers Q ; et celui-ci est l'inverse du foncteur distorsion da. La propriété «universelle» de Pa/Ga s'en déduit aussi.

Le Théorème de comparaison (§4) est alors une simple conséquence de la propriété universelle vérifiée par le paysage anticipé.

Références

ALTMAN J. 1987, A quiet revolution in thinking, *Nature*, 328, 572-573.

AUGER P. 1986, Dynamics in hierarchically organized systems, *Syst. Research* 3, 41-50.

BUNGE M. 1979, *Treatise on Basic Philosophy*, Vol. 4, Reidel.

CYRULNIK B. 1983, *Mémoire de singe et paroles d'hommes*, Paris : Hachette.

EHRESMANN A.C. and VANBREMEERSCH, J.-P. 1987, Hierarchical evolutive systems, A mathematical model for complex systems, *Bull. Math. Biol.* 49, 13-50.

EHRESMANN A.C. and VANBREMEERSCH, J.-P. 1987 b, A mathematical model for complex systems, Prépub, U.F.R. Math., Univ. Picardie, Amiens, 52 pp.

EHRESMANN C. 1968, *Algèbre*, Paris : C.D.U.

KAN D.M. 1958, Adjoint functors, *Trans. A.M.S.* 89, pp. 294-329.

LITTLE J.W. and MOUNT D.W. 1982, The SOS regulatory system of *E. coli*, *Cell* 29, 11-22.

MAC LANE S. 1971, *Categories for the working mathematician*, Springer.

MADDOX J. 1987, Modelling for its own sake, *Nature* 328,571.

MAENHAUT-MICHEL G. 1985, Mechanism of SOS induced targeted and untargeted mutagenesis in *E. coli*, *Biochimie* 67, 365-390.

MOREAU P.L. 1985, Role of *Escherichia coli* RecA protein in SOS induction and post-replication repair, *Biochimie* 67,353-364.

NORTH G. 1987, A celebration of connectionism, *Nature* 328,107.

PRITCHARD R.M. 1978, Control of DNA replication in bacteria, In : *DNA synthesis : present and future*, pp. 1-26 (Molineux, Kohiyama, eds), New York : Plenum Press.

RADMAN M. 1975, SOS repair hypothesis : phenomenology of an inducible DNA repair which is accompanied by mutagenesis, In : *Molecular mechanisms for repair of DNA* (Hanawalt, Setlow, eds), pp. 355-367, New York : Plenum Press.

ROSEN R. 1958, A relational theory of biological systems, *Bull. math. Biophys.* 20, 245-260.

ROSEN R. 1985, Organisms as causal systems which are not mechanisms : an essay in the nature of complexity, In : *Theoretical Biology and Complexity*, New York : Acad. Press.

TEODOROVA S. 1985, Principle of invariance and criterion of evolution in biological structures, *Revue de Bio-mathématiques* 89, 17-30.

THOM R. 1974, *Modèles mathématiques de la morphogenèse*, Paris : Union Générale d'Edition.

VANBREMEERSCH J.-P. and EHRESMANN A.C. 1988, A learning model for complex systems, based on Category Theory, 4th Intern. Conf. on Systems Research, Informatics and Cybernetics at Baden-Baden.