

Revue Internationale de

ISSN 0980-1472

systemique

SYSTÈMES HIÉRARCHIQUES ET COMPLEXITÉ

Vol. 5, N° **1**, 1991

afcet

Dunod

AFSCET

Revue Internationale de
systemique

Revue
Internationale
de Sytémique

volume 05, numéro 1, pages 77 - 95, 1991

Systemes hiérarchiques et variables globales

Pierre Auger

Numérisation Afscet, janvier 2016.



Creative Commons

équipes). Les hiérarchies génétiques ont une organisation moins nettement arborescente, un événement pouvant résulter de plusieurs autres espacés dans le passé.

Les hiérarchies qualitatives n'ont pas de fonctionnement au sens propre, mais les objets réunis dans une classe sont plus semblables entre eux qu'avec les autres. Les hiérarchies structurelles forment des « systèmes quasi décomposables », où les objets intégrés dans un ensemble ont des relations plus fortes entre eux qu'avec les objets extérieurs, et où le niveau micro fait apparaître par agrégation des propriétés émergentes tandis que le niveau macro impose au niveau micro des contraintes globales (passage de la micro à la macro-physique). Les hiérarchies fonctionnelles connaissent des relations intra-niveaux autant qu'inter-niveaux, ces dernières pouvant être ascendantes et porter sur des informations progressivement agrégées, filtrées et abstraites, ou descendantes et porter sur des prescriptions progressivement décomposées, détaillées et concrétisées (passage de l'opération militaire au plan de bataille). Les hiérarchies génétiques ont un « fonctionnement » éphémère qui coïncide avec leur organisation.

Les hiérarchies qualitatives sont conçues par le modélisateur qui définit la place et le nombre des niveaux en fixant des seuils dans l'indice de similarité entre objets. Les hiérarchies structurelles se forment, par génération spontanée ou par construction humaine, niveau après niveau à partir du bas à travers des « structures intermédiaires stables », en profitant de discontinuités dans l'échelle des intensités des relations entre les objets (ordre des quatre forces physiques). Les hiérarchies fonctionnelles sont souvent construites d'abord de toutes pièces, puis elles sont modifiées en agissant sur les objets par complexification et spécialisation, duplication ou fusion, voire changement de niveau, les relations étant elles-mêmes réorganisées (recherche d'une coordination optimale). Les hiérarchies génétiques sont enfin élaborées à partir du sommet, et ne sont plus modifiées ultérieurement que si elles sont conceptuelles.

Bibliographie

- A. KOESTLER et J. SMYTHIES, *Beyond reductionism*, Hutchinson, 1969.
 M. D. MESAROVIC - D. MACKO et Y. TAKOHARA, *Theory of hierarchical multi-level systems*, Academic Press, 1970.
 H. H. PATTEE, *Hierarchy Theory*, George Braziller, 1973.
 H. SIMON, *The sciences of the artificial*, M.I.T. Press, 1969, trad. franç. l'Epi, 1974.
 P. WEISS, *Hierarchically organized systems in theory and practice*, Hafner Publishing Company, 1971.
 L. L. WHYTE, A. G. WILSON et D. WILSON, *Hierarchical structures*, Elsevier, 1963.

SYSTÈMES HIÉRARCHIQUES ET VARIABLES GLOBALES

P. AUGER

Université de Bourgogne ¹

Résumé

Nous considérons un système structuré de manière hiérarchique et contenant un très grand nombre d'éléments en interaction. Tout comme dans nos précédents articles, le système hiérarchique est composé de groupes d'états que peuvent occuper les éléments au cours du temps. Nous supposons que les interactions intra-groupe sont très fortes par rapport aux interactions inter-groupe. A chaque groupe, nous associons une variable globale généralisée qui contrairement à nos articles précédents n'est pas toujours définie par le nombre total d'éléments d'un groupe. Nous présentons une méthode générale qui permet d'obtenir des équations différentielles qui gouvernent la dynamique de ces variables globales généralisées. Pour cela, nous réalisons le produit scalaire entre un vecteur système et un vecteur de référence. Le vecteur système est défini par un vecteur dont les composantes sont les dérivés premières des variables d'états du système alors que dans tous les cas, le vecteur de référence est choisi pour éliminer les termes intra-groupe de la dynamique des variables globales. On montre que ces variables globales sont lentes en regard des variables d'états. Les paramètres de ces équations de la cinétique des variables globales dépendent de fréquences intra-groupe qui permettent de coupler la cinétique intra-groupe et la cinétique des variables globales. Nous présentons un exemple écologique d'un ensemble d'espèces en interactions proie-prédateur organisé hiérarchiquement avec des simulations sur ordinateur. Cette nouvelle méthode nous permet d'obtenir des équations dynamiques gouvernant l'évolution au cours du temps des variables H du modèle de Lotka-Volterra.

1. Biomathématiques, laboratoire d'Ecologie, faculté des Sciences, B.P. 138, 21004 Dijon, France.

Abstract

We consider a hierarchically organized set of interacting elements. Like in previous works, the system is composed of groups of states which can be occupied by the elements with time and we assume strong intra-group interactions and weak inter-group interactions. We give a general method to obtain global variables associated to each group of the hierarchical system. Generalized global variables are defined which can be of various types and not only the total numbers of elements per groups like we only considered in our previous papers. Dynamical differential equations governing the time behaviour of these generalized global variables are obtained from the scalar product of a system vector which is defined by the time derivatives of the system variables by a reference vector. The reference vector is chosen in order to eliminate the intra-group terms from the global variables equations. It is shown that the global variables are slow varying in time with respect to system variables and that the parameters of the global equations are depending on the intra-group frequencies. We present an ecological application of a set of coupled Lotka-Volterra cycles with computer simulations. This new method allows to obtain dynamical equations for global variables of different types such as the H function of the Lotka-Volterra model.

Introduction

Dans nos articles précédents, nous avons présenté un modèle général de système structuré de manière hiérarchique. Ce système hiérarchique contenait un très grand nombre d'éléments susceptibles de changer d'états au cours du temps. Ces états étaient regroupés en groupes d'états de sorte que les transitions intra-groupe soient très fortes par rapport aux transitions inter-groupe. Les groupes d'états pouvaient à leur tour être regroupés en groupes de groupes et ainsi de suite. Nous avons étudié les aspects dynamiques et thermodynamiques de ces systèmes hiérarchiques ([2]-[7]). Ce modèle général a trouvé diverses applications. Nous avons par exemple étudié le couplage entre les niveaux biochimiques et cellulaires [5]. Nous avons également appliqué ce modèle général au couplage des niveaux de l'individu, de la population et de l'écosystème ([3], [4], [7]). Ce modèle peut aussi s'appliquer en économie en couplant les niveaux sectoriels, régionaux, nationaux et internationaux [7].

Dans ce modèle et ses applications, les variables globales utilisées étaient toujours définies par le nombre total d'éléments dans les groupes du système hiérarchique. Le but de ce travail est de montrer qu'il est possible de généraliser le modèle dynamique pour d'autres variables globales que les nombres d'éléments par groupe. Dans la première partie, nous présentons la méthode qui permet de généraliser à diverses variables globales. Ainsi, nous obtenons des équations différentielles en nombre réduit qui gouvernent la dynamique

de ces variables globales. On montre que ces variables globales généralisées sont également des variables lentes, ce qui signifie que la hiérarchie dans la structure du système se traduit par une hiérarchie en temps. Chaque niveau du système hiérarchique correspond à une échelle de temps différente. Dans cette partie, nous rappelons une partie des résultats déjà présentés dans un article réalisé en commun avec G. Resconi [8].

La deuxième partie de cet article concerne des applications de ce modèle de dynamique de variables globales généralisées en écologie. En effet, dans le modèle proie-prédateur de Lotka-Volterra, il existe une variable globale qui est aussi une intégrale première pour cette dynamique que nous appellerons la fonction H. En conséquence, nous considérons un ensemble hiérarchisé d'espèces animales en interactions selon le modèle de Lotka-Volterra. De cette façon, nous regroupons les espèces en groupes d'espèces de sorte que les interactions proie-prédateur ou de compétition soient très fortes à l'intérieur du même groupe et comparativement plus faibles entre espèces appartenant à des groupes différents. A chaque groupe d'espèces, nous associons une seule variable globale qui est précisément définie par la fonction H de ce groupe. Notre méthode générale nous permet d'obtenir des équations différentielles en nombre réduit qui gouvernent l'évolution des fonctions H de chaque groupe. Dans la mesure où les fonctions H sont des intégrales premières pour chaque groupe de la partition, les termes intra-groupe disparaissent de ces équations globales mais pas les termes inter-groupe. Pour illustrer ce modèle, nous étudions diverses situations en particulier pour différents termes inter-groupe et nous réalisons des simulations sur ordinateur de ces équations globales.

1. Rappel du modèle d'Auger-Resconi

1.1. Les équations différentielles du système

Nous allons maintenant rappeler des résultats présentés dans un article commun avec G. Resconi [8]. Considérons un ensemble contenant un très grand nombre d'éléments pouvant occuper différents états i au cours du temps, $i \in [1, N]$. Soit $n_i(t)$ le nombre d'éléments dans l'état i à l'instant t . La dynamique du système est décrite par N équations différentielles gouvernant les variables d'états $n_i(t)$:

$$\frac{dn_i}{dt} = \dot{n}_i = f_i(n_1, n_2, \dots, n_N). \quad (1)$$

En général, de telles équations sont non linéaires et le comportement de ce système peut être très complexe, en particulier si le nombre des équations

différentielles et des variables d'états est élevé. Pour cette raison, dans nos articles précédents, nous avons considéré des systèmes particuliers, c'est-à-dire des systèmes hiérarchisés pour lesquels il est possible d'obtenir une représentation simplifiée.

Dans ces modèles, nous considérons une partition du système en groupes d'états. Soit A le nombre de groupes et N^α le nombre d'états dans le groupe α , $\alpha \in [1, A]$. Soit i_α l'indice de l'état i du groupe α , $i_\alpha \in [1, N^\alpha]$. Les variables fondamentales ou variables d'états ne sont plus $n_i(t)$ mais $n_{i_\alpha}^\alpha(t)$, c'est-à-dire les nombres d'éléments dans le i_α -ième état du groupe α à l'instant t , que nous noterons plus simplement $n_i^\alpha(t)$. Comme dans nos articles précédents, nous utilisons un indice supérieur pour le groupe et un indice inférieur pour l'état.

Les équations (1) peuvent alors s'écrire de la manière suivante :

$$\dot{n}_i^\alpha = f_i^\alpha(\mathbf{n}^\alpha) + \sum_{\beta} f_i^{\alpha\beta}(\mathbf{n}^\alpha, \mathbf{n}^\beta) = F_i^\alpha, \quad (2)$$

avec

$$\mathbf{n}^\alpha = (n_1^\alpha, n_2^\alpha, \dots, n_{N^\alpha}^\alpha) \quad \text{et} \quad \mathbf{n}^\beta = (n_1^\beta, n_2^\beta, \dots, n_{N^\beta}^\beta),$$

où

$$|f_i^\alpha| \gg |f_i^{\alpha\beta}|.$$

f_i^α sont des fonctions intra-groupe α ne dépendant que des composantes du vecteur \mathbf{n}^α alors que les fonctions $f_i^{\alpha\beta}$ sont des fonctions inter-groupe α et β dépendant des vecteurs \mathbf{n}^α et \mathbf{n}^β . $\mathbf{F}^\alpha = (F_1^\alpha, F_2^\alpha, \dots, F_{N^\alpha}^\alpha)$ est par définition le vecteur du système. Comme dans tous nos articles précédents, il est supposé que les termes intra-groupe sont très forts par rapport aux termes inter-groupe. Les termes dominants dans les équations différentielles (2) sont les termes intra-groupe. Les termes inter-groupe peuvent être considérés comme des perturbations en comparaison.

1.2. Les variables globales généralisées et leur dynamique

Maintenant, nous allons généraliser les méthodes utilisées pour obtenir des équations différentielles en nombre réduit gouvernant les variables globales que sont les nombres totaux d'éléments par groupe n^α à des variables globales diverses V^α qui peuvent être différentes des n^α , [10]. Définissons un vecteur de référence associé au groupe α , disons \mathbf{R}^α , dont les composantes R_i^α ne dépendent que des coordonnées du vecteur d'état de ce groupe α :

$$R_i^\alpha(\mathbf{n}^\alpha) = R_i^\alpha(n_1^\alpha, n_2^\alpha, \dots, n_{N^\alpha}^\alpha) = \frac{\partial V^\alpha}{\partial n_i^\alpha}. \quad (3)$$

Par définition, nous obtiendrons les équations différentielles gouvernant la variable globale V^α , en effectuant le produit scalaire du vecteur de référence \mathbf{R}^α par le vecteur du système \mathbf{F}^α :

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{R}^\alpha &= (R_1^\alpha, R_2^\alpha, \dots, R_{N^\alpha}^\alpha), \\ \mathbf{F}^\alpha &= (F_1^\alpha, F_2^\alpha, \dots, F_{N^\alpha}^\alpha), \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

et

$$\dot{V}^\alpha = \mathbf{R}^\alpha(\mathbf{n}^\alpha) \cdot \mathbf{F}^\alpha(\mathbf{n}^1, \mathbf{n}^2, \dots, \mathbf{n}^A) = \sum_{i=1}^{N^\alpha} R_i^\alpha F_i^\alpha.$$

Les fonctions F_i^α ont été définies par les équations (2) et sont composées de deux parties, une partie intra-groupe f_i^α ne dépendant que des composantes du vecteur d'état de ce groupe α et des parties inter-groupe $f_i^{\alpha\beta}$ dépendant à la fois des composantes du vecteur d'état du groupe α et des composantes du vecteur d'état du groupe β . Ainsi, par définition, l'équation différentielle qui gouverne la variable globale généralisée V^α est définie par le produit scalaire du vecteur du système par le vecteur de référence relatif au groupe α .

Dans de nombreux systèmes, les variables globales pertinentes qui sont en général des intégrales premières pour la dynamique intra-groupe sont connues. Par exemple, dans nos articles précédents, nous utilisons les nombres totaux d'éléments par groupe α . Mais, dans l'exemple d'un ensemble d'espèces en interaction selon le modèle proie-prédateur de Lotka-Volterra, il existe une variable globale H^α qui est une intégrale première pour cette dynamique et qui caractérise le système dans sa totalité. La fonction H^α peut donc être choisie comme variable globale. Comme nous l'avons indiqué précédemment, nous choisissons le vecteur de référence comme suit :

$$R_i^\alpha = \frac{\partial V^\alpha}{\partial n_i^\alpha}. \quad (5)$$

Par exemple, si $V^\alpha = \sum_i (n_i^\alpha)^2$, le vecteur de référence est donc :

$$R_i^\alpha = \frac{\partial V^\alpha}{\partial n_i^\alpha} = 2n_i^\alpha. \quad (6)$$

Dans le cas habituel où la variable globale est simplement le nombre total d'éléments dans le groupe α , les composantes du vecteur de référence du groupe α sont donc définies par (7) :

$$R_i^\alpha = \frac{\partial V^\alpha}{\partial n_i^\alpha} = 1. \quad (7)$$

Toutes les composantes de ce vecteur de référence sont égales à l'unité. Les équations (4) sont composées en tout de A équations différentielles alors que les équations (1) ou (2) sont composées de $\sum_{i=1}^A N^\alpha$ équations. Par exemple, dans le cas d'une partition en 5 groupes de 5 états chacun, il y a 25 équations fondamentales gouvernant les variables d'états du type (1) ou (2) et seulement 5 équations différentielles gouvernant les variables globales du type (4). De cette manière, on peut considérer qu'il s'agit d'une méthode de réduction de la complexité de ces systèmes. En effet, on obtient un nombre réduit d'équations différentielles gouvernant la cinétique des variables globales qui peuvent être beaucoup plus facilement étudiées que les équations fondamentales des variables d'états.

Définissons des fréquences intra-groupe $v_i^\alpha(t)$ par le rapport des variables d'états à la variable globale de ce groupe α . Il s'agit d'une définition similaire à celle donnée dans nos articles précédents ([6]-[8]) :

$$v_i^\alpha(t) = \frac{n_i^\alpha(t)}{V^\alpha(t)}. \quad (8)$$

Substituons $v_i^\alpha(t) \cdot V^\alpha(t)$ à $n_i^\alpha(t)$ dans les équations (4) et nous obtenons ainsi un système d'équations différentielles gouvernant la cinétique des variables globales généralisées et qui ne dépend que de ces variables globales $V^\alpha(t)$ et aussi des fréquences intra-groupe généralisées $v_i^\alpha(t)$ qui établissent un lien entre la dynamique intra-groupe et la dynamique des variables globales :

$$\dot{V}^\alpha = \mathbf{R}^\alpha(V^\alpha, v_i^\alpha) \cdot \mathbf{F}^\alpha(V^1, v_i^1, V^2, v_i^2, \dots, V^A, v_i^A). \quad (9)$$

1.3. Variables globales lentes et variables d'états rapides

Maintenant, substituons les équations (2) dans les équations (9), il vient :

$$\dot{V}^\alpha = \sum_{i=1}^{N^\alpha} \mathbf{R}_i^\alpha f_i^\alpha + \sum_{\beta=1}^A \sum_{i=1}^{N^\alpha} \mathbf{R}_i^\alpha f_i^{\alpha\beta}, \quad (10)$$

avec

$$\mathbf{I} = \sum_{i=1}^{N^\alpha} \mathbf{R}_i^\alpha f_i^\alpha \quad \text{et} \quad \mathbf{II} = \sum_{\beta=1}^A \sum_{i=1}^{N^\alpha} \mathbf{R}_i^\alpha f_i^{\alpha\beta}.$$

Les équations précédentes sont la somme de deux termes, un premier terme I qui se rapporte à la partie intra-groupe α et un second terme II qui se rapporte aux interactions inter-groupe α et β . Dans tous les cas, le vecteur

de référence est choisi de façon à annuler la partie intra-groupe I des équations (10). Ceci signifie que soit la variable globale V^α est une intégrale première pour la dynamique intra-groupe ou encore qu'il existe un équilibre à l'intérieur de chaque groupe α annulant pour toute valeur des variables globales la partie intra-groupe des équations différentielles. En conséquence, dans tous les cas, la relation suivante est supposée être vérifiée :

$$\mathbf{I} = \sum_{i=1}^{N^\alpha} \mathbf{R}_i^\alpha f_i^\alpha = \mathbf{R}^\alpha \cdot \mathbf{f}^\alpha = 0 \quad \text{avec} \quad \mathbf{f}^\alpha = (f_1^\alpha, f_2^\alpha, \dots, f_{N^\alpha}^\alpha). \quad (11)$$

Dans ces conditions, nous demandons que la partie intra-groupe des équations différentielles gouvernant les variables globales soit nulle, ce qui signifie que nous avons :

$$\mathbf{I} = \text{partie intra-groupe de } \dot{V}^\alpha = 0. \quad (12)$$

Mais, la dérivé par rapport au temps \dot{V}^α s'écrit toujours de la manière suivante :

$$\dot{V}^\alpha = \sum_{i=1}^{N^\alpha} \frac{\partial V^\alpha}{\partial n_i^\alpha} \frac{dn_i^\alpha}{dt} = \sum_{i=1}^{N^\alpha} \frac{\partial V^\alpha}{\partial n_i^\alpha} \dot{n}_i^\alpha. \quad (13)$$

En conséquence, en utilisant la définition du vecteur de référence, l'équation (12) qui annule la partie intra-groupe peut se réécrire sous forme d'un produit scalaire comme suit :

$$\mathbf{I} = \text{partie intra-groupe de } \dot{V}^\alpha = \sum_{i=1}^{N^\alpha} \frac{\partial V^\alpha}{\partial n_i^\alpha} \dot{n}_i^\alpha = \sum_{i=1}^{N^\alpha} \frac{\partial V^\alpha}{\partial n_i^\alpha} f_i^\alpha = \mathbf{R}^\alpha \cdot \mathbf{f}^\alpha = 0. \quad (14)$$

Dans (14), nous remplaçons \dot{n}_i^α par f_i^α (ce qui est vrai lorsque l'on ne considère que la partie intra-groupe des équations). Le vecteur de référence de composantes $\partial V^\alpha / \partial n_i^\alpha$ est choisi perpendiculaire en tout point à la variété V^α dans l'espace des variables d'état n_i^α . Dans ces conditions, la variable globale V^α est une intégrale première pour la cinétique intra-groupe. En conséquence, la partie intra-groupe disparaît des équations (10) gouvernant les variables globales qui se réduisent alors à (15) :

$$\dot{V}^\alpha = \sum_{\beta=1}^A \sum_{i=1}^{N^\alpha} \sum_{k=1}^{N^\beta} \mathbf{R}_i^\alpha(V^\alpha, v_i^\alpha) f_i^{\alpha\beta}(V^\alpha, v_i^\alpha, V^\beta, v_k^\beta). \quad (15)$$

La condition d'annulation de la partie intra-groupe est une condition indispensable car elle entraîne une hiérarchie dans les échelles de temps associées aux variables d'état et aux variables globales. La hiérarchie en

temps signifie que pour tout groupe α , la variable globale V^α est une variable lente par rapport à toute variable d'état n_i^α de ce groupe, ce qui se traduit par :

$$|\dot{V}^\alpha| \ll |\dot{n}_i^\alpha|. \quad (16)$$

En effet, les équations (15) montrent que les variables globales V^α sont uniquement gouvernées par les termes inter-groupe qui restent petits en comparaison des termes intra-groupe qui gouvernent essentiellement les variables d'état. Ces différences dans les ordres de grandeur des dérivés en temps des variables globales et d'état donnent lieu à une hiérarchie dans les échelles de temps.

1.4. Les équations de la cinétique globale

Cette hiérarchie en temps est importante car elle permet dans certains cas de remplacer les fréquences intra-groupe qui sont des fonctions du temps par leur moyenne en temps dans les équations (15).

En fait, plusieurs cas peuvent se produire. Dans un premier cas, pour chaque valeur des variables globales, il existe un équilibre intra-groupe à l'intérieur de chaque groupe caractérisé par un point stationnaire stable. En ce cas, on peut remplacer les fréquences intra-groupe par leur valeurs prises en ces points stationnaires stables, c'est-à-dire par des valeurs constantes du moins pour chaque ensemble de valeurs des variables globales. Chaque groupe se caractérise alors pour chaque ensemble de valeurs des variables globales lentes par un équilibre fixe. Dans un deuxième cas, la dynamique intra-groupe peut correspondre à un mouvement cyclique au tour d'un point stationnaire qui en ce cas n'est pas un point stable. Il peut s'agir d'un cycle limite stable, d'un centre ou de tout autre mouvement périodique en temps autour d'un point stationnaire. En ce cas, si ce mouvement cyclique existe, il est très rapide en regard des variations des variables globales qui sont très lentes. De ce fait, nous pouvons remplacer les fréquences qui sont des fonctions du temps périodiques très rapides par leurs moyennes en temps \bar{v}_i^α dans les équations de la cinétique des variables globales donnant :

$$\dot{V}^\alpha = \sum_{\beta=1}^A \sum_{i=1}^{N^\alpha} \sum_{k=1}^{N^\beta} R_i^\alpha(V^\alpha, \bar{v}_i^\alpha) f_i^{\alpha\beta}(V^\alpha, \bar{v}_i^\alpha, V^\beta, \bar{v}_k^\beta). \quad (17)$$

Les équations (17) sont très intéressantes car elles ne dépendent que des variables globales. En effet, si l'on connaît les valeurs constantes ou les moyennes en temps des fréquences intra-groupe, qui peuvent dans le cas général dépendre des valeurs prises par les variables globales, alors les équations (17) ne dépendent plus que de ces variables globales. Elles sont en

nombre réduit par rapport aux équations des variables d'état et elles sont directement utilisables et peuvent être étudiées.

Dans certains cas, il faudra étudier les moyennes en temps des dérivés des variables globales \dot{V}^α . En effet, les résultats peuvent différer selon que l'on remplace les fréquences par leurs moyennes en temps dans les dérivés \dot{V}^α ou bien en remplaçant les dérivés \dot{V}^α par leurs moyennes en temps pour chaque ensemble de valeurs possibles des variables globales. Nous étudierons ces différents cas pour un exemple de cycles de Lotka-Volterra couplés étudié au paragraphe 2.

1.5. Cas particulier de la variable globale n^α

Dans le cas particulier des variables globales que sont les nombres d'éléments par groupe n^α , le vecteur de référence est simplement $\mathbf{R}^\alpha = (1, 1, 1, \dots, 1)$. En appliquant la méthode décrite précédemment, les équations de la cinétique de ces variables globales deviennent :

$$\dot{n}^\alpha = \dot{V}^\alpha = \sum_{\beta=1}^A \sum_{i=1}^{N^\alpha} f_i^{\alpha\beta}. \quad (18)$$

Ces équations sont similaires à celles que nous avons utilisées dans nos articles antérieurs ([4], [7]). Dans ces équations, selon les cas, les fréquences doivent être remplacées par leurs valeurs prises en un point stationnaire stable ou bien encore par leurs valeurs moyennes au cours du temps.

2. Cycles couples de Lotka-Volterra

2.1. Les équations fondamentales

Considérons A groupes α composés de N^α espèces i chacun, $i \in [1, N^\alpha]$. Dans cet exemple, $n_i^\alpha(t)$ représente le nombre de proies ou de prédateurs i du α -ième groupe d'espèces à l'instant t . Soient les équations différentielles suivantes gouvernant la cinétique des variables d'état :

$$\dot{n}_i^\alpha = \varepsilon_i^\alpha n_i^\alpha + \frac{1}{\beta_i^\alpha} \sum_j \alpha_{ij}^\alpha n_j^\alpha n_i^\alpha + \sum_{\beta} f_i^{\alpha\beta} = f_i^\alpha + \sum_{\beta} f_i^{\alpha\beta}, \quad (19)$$

avec

$$f_i^\alpha = \varepsilon_i^\alpha n_i^\alpha + \frac{1}{\beta_i^\alpha} \sum_j \alpha_{ji}^\alpha n_j^\alpha n_i^\alpha.$$

Nous n'explicitons pas les fonctions inter-groupe $f_i^{\alpha\beta}$. ε_i^α est le taux de croissance de l'espèce i du groupe α . Ces taux sont positifs pour les proies

qui en absence de prédateurs se développeraient très rapidement et négatifs pour les prédateurs qui en absence de proies disparaîtraient. β_i^α sont les inverses des nombres équivalents de Volterra. α_{ji}^α sont les coefficients d'interaction entre la proie i et le prédateur j du même groupe d'espèces α , ou l'inverse. Ces termes sont antisymétriques, c'est-à-dire que pour tout (α, i, j) , nous avons $\alpha_{ji}^\alpha = -\alpha_{ij}^\alpha$. Les termes inter-groupe ne sont pas explicités, mais il s'agit également de termes proie-prédateur, de termes de compétition ou de tous autres termes d'interactions inter-spécifiques ([18], [20]).

Dans cet exemple, l'hypothèse de hiérarchie signifie que les termes d'interactions entre espèces appartenant au même groupe sont dominants en regard des termes d'interactions entre espèces appartenant à des groupes différents [21]. Les prédateurs du groupe α se nourrissent beaucoup plus des proies de leur groupe α que des proies d'un autre groupe β . Le système peut être considéré comme un écosystème qui peut se subdiviser en des sous-écosystèmes quasi-autonomes. Cette hypothèse de hiérarchie dans les interactions entre les espèces de l'écosystème s'écrit :

$$\text{pour tout } (\alpha, \beta, i) \quad |f_i^\alpha| \gg |f_i^{\alpha\beta}|. \quad (20)$$

2.2. Une variable globale pour chaque groupe, la fonction H^α

Pour le système de Lotka-Volterra, il existe une intégrale première habituellement notée fonction H ou encore fonction G . Pour chaque groupe isolé α , la fonction H^α est la suivante ([11], [13]-[15], [17], [27]) :

$$H^\alpha = \sum_{i=1}^{N^\alpha} \tau_i^\alpha \{ \exp(v_i^\alpha) - v_i^\alpha \} = \text{constante pour les termes intra-groupe } \alpha, \quad (21)$$

Les variables v_i^α et les constantes τ_i^α sont définies par les relations suivantes :

$$\text{avec} \quad \tau_i^\alpha = \beta_i^\alpha q_i^\alpha \quad \text{et} \quad v_i^\alpha = \log \left\{ \frac{n_i^\alpha}{q_i^\alpha} \right\}. \quad (22)$$

q_i^α est la population du point stationnaire de la i -ième espèce du groupe α , calculée en annulant la partie intra-groupe des équations différentielles (19), $\dot{n}_i^\alpha = 0$. Ces populations d'équilibre si elles existent doivent être positives pour avoir une signification biologique. Nous choisissons les variables H^α comme variables globales. Nous allons maintenant rechercher les équations différentielles qui gouvernent leur évolution au cours du temps en utilisant la méthode présentée dans les précédents paragraphes. En appliquant la définition (3) du vecteur de référence, les composantes R_i^α du vecteur de référence sont données

par les expressions suivantes :

$$R_i^\alpha = \left(\frac{\partial H^\alpha}{\partial n_i^\alpha} \right) = \left(\frac{\tau_i^\alpha}{q_i^\alpha} - \frac{\tau_i^\alpha}{n_i^\alpha} \right). \quad (23)$$

Par définition, la fonction H^α est une intégrale première pour la dynamique intra-groupe ([13]-[15]) :

$$\dot{H}^\alpha = \sum_i R_i^\alpha f_i^\alpha = 0. \quad (24)$$

En conséquence, pour chaque groupe α , la partie intra-groupe des équations des variables globales disparaît. Maintenant, utilisons la méthode générale décrite précédemment pour obtenir les équations différentielles qui gouvernent la cinétique des variables globales H^α .

$$\dot{H}^\alpha = \sum_\beta \sum_i R_i^\alpha f_i^{\alpha\beta} = \sum_\beta \mathbf{R}^\alpha \mathbf{f}^{\alpha\beta}, \quad (25)$$

avec

$$\mathbf{f}^{\alpha\beta} = (f_1^{\alpha\beta}, f_2^{\alpha\beta}, \dots, f_i^{\alpha\beta}, \dots, f_{N^\alpha}^{\alpha\beta}).$$

2.3. Valeurs moyennes en temps des variables rapides

Remplaçons le vecteur de référence par son expression (23) dans les équations (25) :

$$\dot{H}^\alpha = \sum_\beta \sum_i \left(\frac{\tau_i^\alpha}{q_i^\alpha} - \frac{\tau_i^\alpha}{n_i^\alpha} \right) f_i^{\alpha\beta}. \quad (26)$$

Les fréquences intra-groupe v_i^α sont définies par les relations suivantes :

$$v_i^\alpha = \frac{n_i^\alpha}{H^\alpha}. \quad (27)$$

Dans la mesure où les variables n_i^α sont des fonctions du temps, les fréquences sont également même pour chaque valeur de la variable globale H^α des fonctions du temps. Mais, comme nous avons vu que les variables d'état sont des variables très rapides en regard des variables de groupe, nous pouvons considérer leurs moyennes en temps qui sont tout simplement :

$$\bar{v}_i^\alpha = \frac{q_i^\alpha}{H^\alpha}. \quad (28)$$

En effet, les moyennes en temps des variables d'état sont les populations d'équilibre, c'est-à-dire $\bar{n}_i^\alpha = q_i^\alpha$. Dans le modèle de Lotka-Volterra, les variables d'état cyclent très rapidement autour du point stationnaire et on peut montrer que les moyennes en temps des populations des diverses espèces sont précisément égales aux populations du point stationnaire ([13]-[15]). Il est clair que les équations de la cinétique des variables globales dépendront de la nature des fonctions inter-groupe. Nous allons maintenant rechercher les valeurs moyennes au cours du temps de ces fonctions inter-groupe.

2.4. Distribution de Gibbs et valeurs moyennes en temps des fonctions inter-groupe

Lorsqu'il y a un grand nombre d'espèces en interaction, il devient impossible de connaître à chaque instant les valeurs des populations de chaque espèce. Pour cela, il faudrait résoudre un nombre d'équations différentielles couplées trop important. Il devient alors très utile de rechercher une fonction de densité de probabilité permettant de prédire non pas la valeur exacte des effectifs à chaque instant mais la probabilité de trouver la population d'une espèce entre certaines valeurs. E. Kerner a étudié un ensemble d'un grand nombre d'espèces en interaction de Lotka-Volterra. Cette étude a montré que pour le système de Lotka-Volterra, on peut obtenir une fonction de densité de probabilité ρ donnant la densité de probabilité des effectifs des diverses espèces ([13]-[15]).

Dans notre modèle hiérarchisé, chaque groupe d'espèces α (isolé, c'est-à-dire en négligeant les termes inter-groupe), peut-être considéré comme un ensemble d'espèces en interaction selon Lotka-Volterra. On peut donc associer à chaque groupe une fonction de densité $\rho^\alpha(v_1^\alpha, v_2^\alpha, \dots, v_{N^\alpha}^\alpha)$ dépendant des variables v_i^α utilisées dans les équations (21). E. Kerner a montré que les variables v_i^α obéissent au théorème de Liouville et qu'elles sont les variables de phase ([13]-[15]). Ainsi, pour le groupe α et pour l'espèce i , la probabilité de trouver la variable de phase avec des valeurs comprises entre v_i^α et $v_i^\alpha + dv_i^\alpha$ est exprimée par la relation suivante :

$$dP_i^\alpha = \rho^\alpha(v_1^\alpha, v_2^\alpha, \dots, v_{N^\alpha}^\alpha) dv_i^\alpha. \quad (29)$$

On montre que la fonction de densité est une distribution de Gibbs prenant la forme suivante :

$$\rho^\alpha(v_1^\alpha, v_2^\alpha, \dots, v_{N^\alpha}^\alpha) = A^\alpha \exp(-H^\alpha/\theta^\alpha). \quad (30)$$

A^α est une constante de normalisation et θ^α est la « température » du groupe d'espèces α . Pour plus de détails sur le modèle de Kerner, nous renvoyons aux articles suivants ([13], [14]). On peut alors utiliser cette fonction

de densité de probabilité pour calculer la valeur moyenne de toute fonction f^α .

$$\bar{f}^\alpha = \frac{\int \rho^\alpha f^\alpha d\tau^\alpha}{\int \rho^\alpha d\tau^\alpha}, \quad (31)$$

où $d\tau^\alpha$ représente un hypervolume infinitésimal autour d'un point de l'espace de phase. Les valeurs moyennes de diverses fonctions ont été calculées et nous indiquons la référence où on trouvera les détails de calcul [13]. Par exemple, la valeur moyenne de l'effectif de chaque population i du groupe α est la population du point stationnaire q_i^α . La valeur moyenne de la fonction $\partial H^\alpha/\partial v_i^\alpha$ est égale à zéro. Il en est de même de la valeur moyenne des composantes du vecteur de référence $R_i^\alpha = \partial H^\alpha/\partial n_i^\alpha$. Par contre, la valeur moyenne du carré de l'écart d'une population par rapport à sa valeur d'équilibre $(n_i^\alpha - q_i^\alpha)^2$ est différente de zéro. C'est une fonction de la température du groupe α :

$$\overline{(n_i^\alpha - q_i^\alpha)^2} = \frac{\theta^\alpha q_i^\alpha}{\beta_i^\alpha}. \quad (32)$$

2.5. Simulations sur ordinateur des équations de la cinétique globale

Les équations de la cinétique des variables globales peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$\dot{H}^\alpha = \sum_{\beta} \sum_i g_i^{\alpha\beta} \quad \text{avec} \quad g_i^{\alpha\beta} = \left(\frac{\tau_i^\alpha}{q_i^\alpha} - \frac{\tau_i^\alpha}{n_i^\alpha} \right) f_i^{\alpha\beta}. \quad (33)$$

Dans les équations de la cinétique des variables globales (33), il apparaît des fonctions inter-groupe $g_i^{\alpha\beta}$. Pour un temps d'observation du système grand par rapport au temps de relaxation des variables d'état de chaque groupe et petit par rapport aux variations des variables globales lentes, on peut admettre que ces fonctions peuvent être remplacées dans (33) par leur valeur moyenne $\bar{g}_i^{\alpha\beta}$:

$$\dot{H}^\alpha = \sum_{\beta} \sum_i \bar{g}_i^{\alpha\beta}. \quad (34)$$

Il est clair que les expressions de ces fonctions moyennes $\bar{g}_i^{\alpha\beta}$ peuvent être très variées et dépendent en particulier des fonctions d'interaction interspécifiques et inter-groupe choisies $f_i^{\alpha\beta}$. Ces valeurs moyennes peuvent dépendre

des températures θ^α et θ^β et également des valeurs des variables globales elles-mêmes H^α et H^β . En effet, la variable globale H^α qui est une intégrale première pour le système de Lotka-Volterra caractérise chaque groupe d'espèces dans sa totalité et des relations existent entre cette fonction et la température du groupe. Par exemple, en Physique statistique, il existe des relations entre l'énergie moyenne et la température. On peut donc écrire que les valeurs moyennes en temps des fonctions inter-groupe $\bar{g}_i^{\alpha\beta}$ sont des fonctions de $(\theta^\alpha, \theta^\beta, H^\alpha, H^\beta, \dots)$.

Dans la suite, nous allons considérer seulement deux groupes d'espèces $\alpha = 1$ ou 2. Nous allons également supposer que les valeurs moyennes $\bar{g}_i^{\alpha\beta}$ sont des fonctions connues s'écrivant :

$$\begin{aligned} \dot{H}^1 &= \sum_i \bar{g}_i^{12} = A^1 + B^1 H^1 + C^1 H^2 + D^{12} H^1 H^2, \\ \dot{H}^2 &= \sum_i \bar{g}_i^{21} = A^2 + B^2 H^2 + C^2 H^1 + D^{21} H^1 H^2. \end{aligned} \quad (35)$$

Dans les équations (35), les paramètres $A^1, A^2, B^1, B^2, C^1, C^2, D^{21}$ et D^{12} sont des constantes.

Nous n'explicitons pas ici la nature des fonctions interspécifiques inter-groupe requises afin d'obtenir ces expressions des équations de la cinétique des variables globales.

Par exemple, la figure 1 présente le résultat d'une simulation sur ordinateur par la méthode de Runge-Kutta des équations (35) avec les valeurs suivantes des paramètres :

$$\left. \begin{aligned} A^1 = A^2 = B^1 = B^2 = 0, \\ C^1 = 2, \quad C^2 = -1, \quad D^{21} = 1 \quad \text{et} \quad D^{12} = -1. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Les figures présentent la trajectoire dans le plan des variables globales H^1 et H^2 centrée au point singulier. Pour ces valeurs des paramètres, nous obtenons une trajectoire cyclique stable. Au contraire, choisissons maintenant les valeurs suivantes des paramètres des équations (35) :

$$\left. \begin{aligned} A^1 = 1, \quad A^2 = -5, \quad B^1 = -10, \quad B^2 = 10, \\ C^1 = C^2 = 0, \quad D^{21} = -1 \quad \text{et} \quad D^{12} = 1. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

La figure 2 présente les résultats de la simulation sur ordinateur. Dans ce dernier cas, on obtient une trajectoire enroulée du type spirale divergente. Ainsi, en fonction des valeurs des paramètres, la nature de la trajectoire peut être très différente. Or, ces paramètres sont fonctions des équilibres intra-groupe. En conséquence, une variation des équilibres intra-groupe (due par

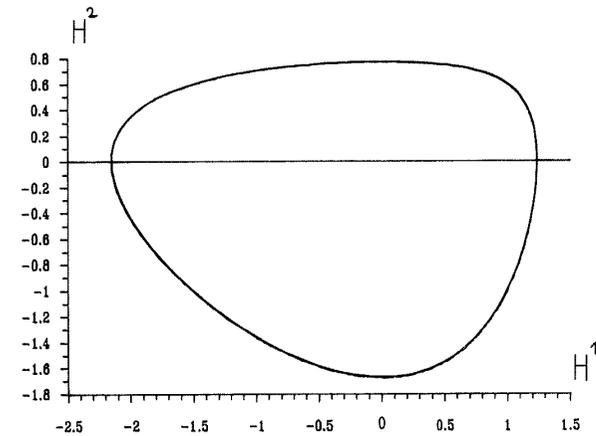


Figure 1. — Simulation sur ordinateur par la méthode de Runge-Kutta des équations de la cinétique des variables globales. On obtient une trajectoire cyclique stable. Le cycle est centré sur le point singulier et les valeurs des variables globales H^1 et H^2 sont exprimées en unités arbitraires.

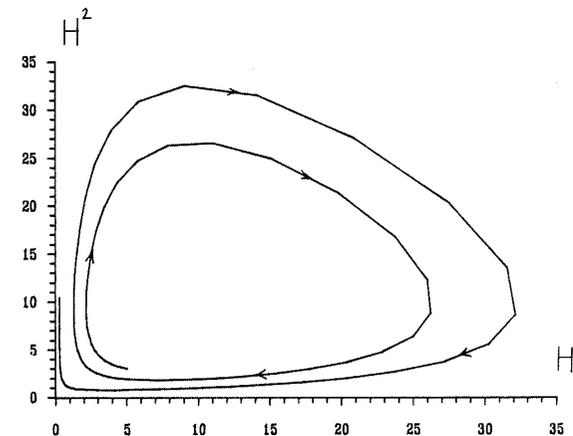


Figure 2. — Simulation sur ordinateur par la méthode de Runge-Kutta des équations de la cinétique des variables globales. On obtient une trajectoire cyclique du type spirale divergente. Le cycle est centré sur le point singulier et les valeurs des variables globales H^1 et H^2 sont exprimées en unités arbitraires.

exemple à un couplage avec l'environnement pouvant modifier par exemple la température θ^α et en conséquence la fonction de densité ρ^α) peut à son

tour faire varier les valeurs des paramètres de la cinétique des variables globales et induire un changement de comportement de celle-ci. Certaines solutions stables peuvent devenir instables. Des bifurcations peuvent se produire au niveau de la dynamique collective induite par des changements intra-groupe. Il s'agit d'un couplage du bas vers le haut ou si l'on préfère l'effet d'un changement intervenant dans un niveau microscopique sur un niveau plus macroscopique.

Le phénomène inverse peut également se produire, c'est-à-dire un couplage du haut vers le bas. En effet, considérons un cas particulier pour lequel il y a seulement deux espèces par groupe. Lorsque les fonctions H^1 et H^2 varient très lentement en regard des populations n_1^1, n_2^1, n_1^2 et n_2^2 , cela agit sur les

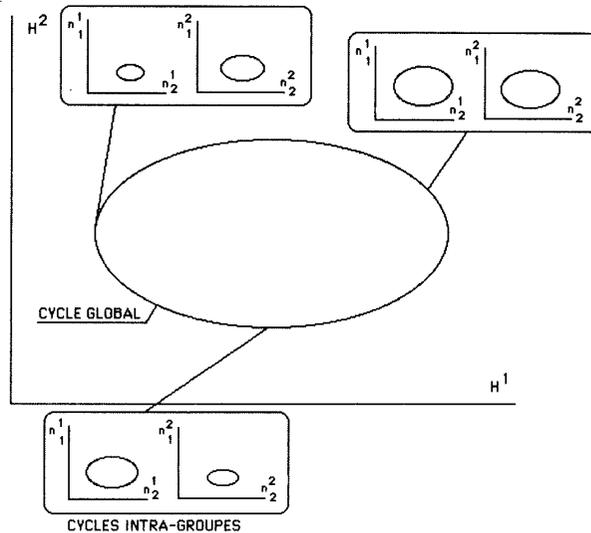


Figure 3. — Pour chaque valeur des variables globales obtenues le long de la trajectoire dans le plan (H^1, H^2) , les variables d'état décrivent un cycle de Lotka-Volterra dont l'amplitude est modulée par les valeurs des variables globales. Les échelles de temps sont très différentes. Le cycle global dans le plan (H^1, H^2) est très lent par rapport aux cycles locaux respectivement dans les plans (n_1^1, n_2^1) et (n_1^2, n_2^2) .

cycles de Lotka-Volterra intra-groupe ([13]-[15]). La figure 3 illustre ce phénomène en montrant pour diverses valeurs du couple de variables globales l'allure des cycles intra-groupe. Les variables globales varient très lentement et pour chaque point de la trajectoire globale, il y a un cycle de Lotka-Volterra très rapide dont l'amplitude est modulée précisément par les valeurs des variables globales.

Discussion et conclusion

Dans cet article, nous avons présenté une méthode générale pour obtenir des équations dynamiques gouvernant des variables globales généralisées. Cette méthode représente un outil utile pour décrire le comportement des systèmes complexes. En effet, au lieu d'étudier et d'essayer de simuler sur ordinateur un grand nombre d'équations différentielles correspondant aux variables d'état, on peut étudier et simuler les équations en nombre réduit qui gouvernent les variables globales. Lorsque le nombre d'états par groupe est très important, la réduction du nombre de variables et des équations à étudier est conséquente. Bien sûr, ces équations de la cinétique des variables globales dépendent des structures d'équilibre intra-groupe, c'est-à-dire des moyennes en temps des fonctions inter-groupe.

Ainsi, des changements dans les structures d'équilibre intra-groupe sont susceptibles de faire varier les fonctions de densité de probabilité de chaque groupe et en conséquence les valeurs moyennes des fonctions inter-groupe. Il s'agit d'un couplage du bas vers le haut pour utiliser la terminologie de nos précédents articles. Une modification à l'intérieur des groupes peut donner lieu à une variation des paramètres de la cinétique des variables globales et engendrer un changement de comportement au niveau global. On peut imaginer des bifurcations induites par des changements intra-groupe.

H. Haken a lui aussi étudié des systèmes dans lesquels différentes échelles de temps existent [12]. Dans ces travaux, il y a un grand nombre de variables couplées et la plupart d'entre elles sont des variables rapides par rapport à quelques autres. Les variables rapides sont remplacées par leur moyenne en temps de façon similaire à la méthode que nous présentons ici. Cette méthode conduit également à l'obtention d'un nombre réduit d'équations différentielles gouvernant les variables lentes.

La méthode que nous avons présentée dans cet article est différente en ce sens que nous effectuons une partition du système entier en groupes, puis nous associons à chaque groupe une seule variable globale. Ces variables globales sont des variables lentes car les interactions intra-groupe sont fortes en regard des interactions inter-groupe. Dans notre méthode, il y a donc une phase de découpage du système entier en sous-systèmes faiblement couplés auxquels sont associés des variables globales lentes. On obtient ensuite des équations gouvernant ces variables globales en nombre réduit.

Les méthodes de moyenne en temps ou encore de multiples échelles de temps ont été très développées par A. H. Nayfeh, D. T. Mook, P. R. Sethna et M. Balachandra ([23]-[25]) dans le but d'obtenir des solutions approchées d'équations différentielles par des méthodes de perturbation. Ces auteurs considèrent diverses échelles de temps, T_0, T_1, \dots, T_n avec $T_n = \varepsilon^n \cdot t$ où ε est

très petit et t est le temps. La solution est obtenue sous forme d'une série en fonction des différentes puissances de ε . Si la série est limitée à l'ordre 2, $O(\varepsilon^2)$, deux échelles de temps sont nécessaires et ainsi de suite. Dans ces travaux, une hiérarchie dans des échelles de temps est utilisée pour obtenir des solutions approchées d'équations différentielles. On peut parler de niveaux d'approximation.

Notre méthode est originale car elle associe à chaque sous-système une variable globale. Nous n'obtenons pas des solutions approchées mais plutôt des systèmes d'équations différentielles approchées, associés à chaque sous-système quasi-autonome de la partition hiérarchique du système et cela à chacun de ses niveaux d'organisation. Ces équations différentielles approchées relatives aux différents niveaux du système hiérarchique peuvent être étudiées et simulées plus facilement que le grand nombre d'équations différentielles gouvernant les variables d'état. Cette méthode se prête bien à l'étude des systèmes hiérarchisés étudiés par de nombreux auteurs parmi lesquels nous citons ([1], [9], [19], [22], [26], [28], [29]). Nous espérons que cette méthode apporte une contribution à la théorie générale des systèmes [16] et à l'analyse de ces systèmes en permettant de prédire leurs comportements.

Ce travail commun avec G. Resconi trouve des applications concrètes dans l'étude des écosystèmes de lac (lac d'Aydat) où des données de terrains sont obtenues par l'équipe de Mme Lair, de l'Université de Clermont-Ferrand. Ces données concernent le comportement individuel des espèces (le plancton et ses prédateurs), les répartitions en classes d'âge ou de mues et les effectifs globaux des espèces tout au long de l'année et à différentes profondeurs du lac. Ces travaux devraient permettre de mieux comprendre les interactions entre les niveaux écologiques et leur action sur l'écosystème.

Références

- [1] T. F. H. ALLEN et T. B. STARR, *Hierarchy. Perspectives for ecological complexity*. University of Chicago, Chicago, 1982.
- [2] P. AUGER, Coupling between N levels of observation of a system (biological or physical) resulting in creation of structure, *Intern. J. Gen. Sys.*, 8, 1980, p. 82-100.
- [3] P. AUGER, Hierarchically organized populations: interactions between individual, population and ecosystem levels, *Math. Biosci.*, 65, 1983, p. 269-289.
- [4] P. AUGER, Dynamics in hierarchically organized systems: a general model applied to ecology, biology and economics, *Syst. Res.*, 3, 1986, p. 41-50.
- [5] P. AUGER, Cellular aging rates and biochemical reaction rates, *Mathl Comput. Modelling*, 11, 1988, p. 164-169.
- [6] P. AUGER, Dynamique et Thermodynamique des systèmes composés de plusieurs niveaux d'organisation, *Revue Internationale de Systémique*, 3, 1989, p. 129-157.

- [7] P. AUGER, *Dynamics and thermodynamics in hierarchically organized systems. Applications in Physics, Biology and Economics*, Pergamon Press, Oxford, 1989.
- [8] P. AUGER et G. RESCONI, Hilbert space and dynamical hierarchical system, *Intern. J. Gen. Sys.*, 16, 1990, p. 232-252.
- [9] A. C. EHRESMANN et J. P. VANBREMEERSCH, Hierarchical evolutive systems: A mathematical model for complex systems, *Bull. of Math. Biol.*, 49, 1987, p. 13-50.
- [10] H. A. FATMI et G. RESCONI, A new computing principle, *Nuevo Cimento*, 101, 1988, p. 239-242.
- [11] N. S. GOEL, S. C. MAITRA et E. W. MONTROLL, On the Volterra and other non linear models of interacting populations, *Rev. of Mod. Phys.*, 43, 1971, p. 231-276.
- [12] H. HAKEN, *Synergetics*, Springer Verlag, New York, 1978.
- [13] E. H. KERNER, A statistical mechanics of interacting biological species, *Bull. of Math. Biol.*, 19, 1957, p. 123-146.
- [14] E. H. KERNER, Further considerations on the statistical mechanics of biological associations, *Bull. of Math. Biol.*, 21, 1959, p. 217-255.
- [15] E. H. KERNER, *Gibbs ensemble: Biological ensemble*, Gordon and Breach, New York, 1972.
- [16] G. J. KLIR, *Architecture of systems problem solving*, Plenum, New York, 1985.
- [17] A. J. LOTKA, *Elements of physical biology*, Williams and Wilkins Co, Baltimore, 1925.
- [18] R. M. MAY, *Theoretical Ecology: Principles and Applications*, Blackwell, Oxford, 1976.
- [19] M. D. MESAROVIC, M. MAKO et Y. TAKAHARA, *Theory of Hierarchical, Multilevel systems*, Academic Press, New York, 1970.
- [20] J. D. MURRAY, *Mathematical Biology*, Springer Verlag, Berlin, 1989.
- [21] R. V. O'NEILL, D. L. DE ANGELIS, J. B. WAIDE et T. F. H. ALLEN, *A hierarchical concept of exosystems*, Princeton University Press, Princeton, 1986.
- [22] H. H. PATTEE, *Hierarchy Theory: the challenge of complex systems*, George Braziller, New York, 1973.
- [23] A. H. NAYFEH et D. T. MOOK, *Nonlinear oscillations*, John Wiley, New York, 1979.
- [24] A. H. NAYFEH, *Perturbation methods*, John Wiley, New York, 1973.
- [25] P. R. SETHNA et M. BALACHANDRA, Some asymptotic results for systems with multiple time scales, *S.I.A.M.J. Appl. Math.*, 17, 1974, p. 611-625.
- [26] H. A. SIMON, *The Sciences of the Artificial*, MIT Press, Cambridge, 1969.
- [27] V. VOLTERRA, *Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie*, Gauthier Villars, Paris, 1931.
- [28] P. WEISS, *Hierarchically Organized Systems in theory and in practise*, Hafner publishing company, New York, 1971.
- [29] L. L. WHYTE, R. G. WILSON et D. WILSON, *Hierarchical Structures*, Elsevier, New York, 1969.