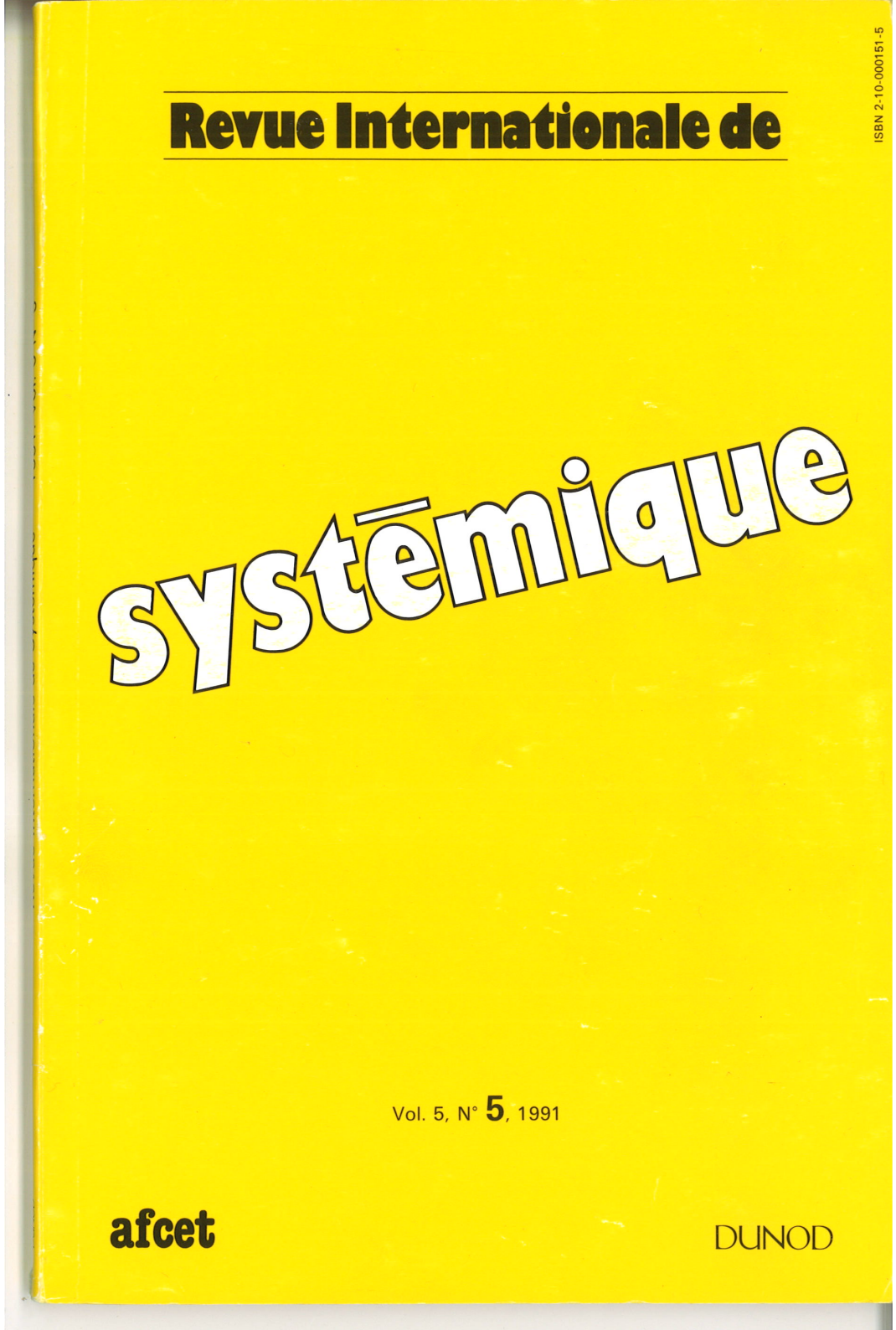


AFSCET

Revue Internationale de systémique

Revue
Internationale
de Sytémique

volume 05, numéro 5, page 517 - 560, 1991

Imbrications de niveaux et esquisse d'un langage systémique associé à des relateurs arithmétiques

Thiébaut Moulin

Numérisation Afscet, août 2017.

Creative Commons

REVUE INTERNATIONALE DE SYSTÉMIQUE
Vol. 5, N° 5, 1991, pp. 517 à 560

IMBRICATIONS DE NIVEAUX ET ESQUISSE D'UN LANGAGE SYSTÉMIQUE ASSOCIÉ A DES RELATEURS ARITHMÉTIQUES

Th. MOULIN

Groupe Systema, Ecole Nationale Supérieure de Techniques Avancées [1]

Résumé

Des niveaux de description (observation, structuration, fonctionnement, synthèse) et des niveaux d'organisation sont appréhendés globalement au moyen de relateurs arithmétiques stabilisés (RA). Un langage décrivant ces niveaux peut être esquissé. Ses éléments de base sont associés aux algèbres de Lie semi-simples et aux catastrophes élémentaires. La coïncidence de points engendrés simultanément par un RA direct et par son conjugué fait émerger un aspect syntaxique. Des « éléments structurés de déplacement » (ESD) sont mis en correspondance avec des « Iterated Function Systems » de la théorie fractale de M. Barnsley. Des aspects informationnels sont résumés avec ambiguïté et flou par les « nombres d'information virtuelle ». Cette approche introduit, après passage à la limite, des référentiels de type *p*-adique qui complètent les référentiels continus classiques des physiciens.

Abstract

Description levels (observation, structuration, processing modes, synthesis) and organization levels are apprehended as a whole by means of stabilized arithmetical relators (AR). A language describing these levels may be sketched. Its basic elements are associated to semi-simple Lie algebras and elementary catastrophes. The coincidence of points produced simultaneously by a direct AR and its conjugate gives a syntactical aspect. "Elementary structurated displacements" (ESD) are linked to "Iterated Function Systems" of M. Barnsley's fractal theory. Information aspects are summarized with ambiguity and fuzziness by means of "virtual information numbers". This approach introduces *p*-adic type reference frames which are added to the classical continuous reference frames of the physicists.

1. 32, boulevard Victor, 75015 Paris.

Rev. intern. systémique. 0980-1472 Vol. 5/91/05/ 517 /44/$ 6.40/© Afcet Gauthier-Villars

Introduction

L'adaptation d'un système naturel à son environnement peut être exprimée structurellement au moyen de relateurs arithmétiques stabilisés (RA) [1]. Elle implique généralement des imbrications de niveaux justifiées, dans le cas le plus simple, par un théorème de J.-P. Luminet [1]. On pourrait imaginer que leur interprétation se situe nécessairement à un degré d'abstraction élevé en raison de la correspondance entre relateurs cycliques de base (BCR) et systèmes de racines d'algèbres de Lie semi-simples [2] (mise en évidence par Ph. Riot [2] et approfondie par F. Chauvet [3]). Ce serait oublier que les groupes de Weyl [1] associés aux systèmes de racines sont aussi des groupes cristallographiques [4] s'appliquant d'abord à des structures moléculaires. Des interprétations concrètes montrent comment peuvent s'enchaîner différentes notions de niveaux d'observation, de structuration, de fonctionnement, d'abstraction, appelés en bloc niveaux de description, comment émergent des niveaux d'organisation et comment un principe d'autoréférence partielle [5], complété par un principe d'invariance structurelle approchée sous l'effet de changements de niveaux [6, p. 475], traduit en partie la cohérence globale d'un système vivant. Les résultats obtenus suggèrent la mise en œuvre d'un langage systémique fondé sur des types de singularité, des classes de fonctionnement et des « nombres d'information virtuelle »; des éléments ont été présentés par F. Chauvet [7] lors du Congrès Européen de Systémique CES1, en octobre 1989.

1. Niveaux d'observation

L'étude du processus d'observation d'un système a fait l'objet de nombreuses recherches. La plupart des théories, même celle très générale de R. Vallée [8 *a* à 8 *c*], suppose, ne serait-ce qu'à titre provisoire, l'existence d'un cadre spatiotemporel continu objectif. Dans une approche utilisant un RA, ce continuum n'est pas imposé *ab initio*. Mais, après de délicats passages à la limite, les variables principales X_μ du RA (qui ne prennent que des valeurs entières) peuvent être associées à des composantes spatiotemporelles

1. Une présentation des RA, intitulée « Le relateur arithmétique, source de nouveaux concepts systémiques », est parue dans le n° 4, vol. 3, 1989, de la *Revue Internationale de Systémique* [6]. En annexe, est donné un bref résumé de cet article avec rappel des principales notions introduites. Mais ce résumé est dense; il est donc vivement conseillé de prendre connaissance ou de relire la présentation faite en 1989.

Dans le présent article, RA signifie « relateurs arithmétiques stabilisés »; l'adjectif « stabilisé » est sous-entendu.

2. Des rappels sont donnés en annexe.

classiques, à d'autres grandeurs physiques ou encore à des assemblages de ces grandeurs. Ces passages à la limite effacent les structures qui décrivent localement un système global, de même que l'application du formalisme différentiel à la description de formes d'organismes pluricellulaires élimine les rubans d'ADN présents au sein de chaque cellule. Tant que les passages ne sont pas effectués, diverses significations peuvent coexister. Chacune d'elles est caractérisée par les structures sous-jacentes mises en œuvre, par le mode de fonctionnement du RA et par la factorisation de certains paramètres.

Les X_μ peuvent avoir aussi une signification plus abstraite, associée à un système de racines d'une algèbre de Lie [1] [2], [3]. Les applications des structures de Lie sont bien connues en physique quantique; elles commencent à se développer en systémique, notamment pour la commande en temps optimal des systèmes non linéaires. Par exemple, en s'appuyant sur la théorie de M. Fliess [9], S. Belghith et M.-M. Rosset [10] ont étudié la commande du chauffage d'appoint et l'isolation extérieure d'un habitat solaire.

1.1. *Notion « d'observateur-acteur pacifique »*

En fait, on ne peut pas dissocier l'observation d'un système et la recherche de « bons » espaces de description. Ces espaces correspondent à des structures sous-jacentes que le cerveau humain exploite inconsciemment et qui donnent sens à l'observation. R. Thom estime qu'elles correspondent principalement aux catastrophes élémentaires, en raison de l'importance qu'il attribue au continu et aux structures différentiables (*cf.* notamment [11], p. 157). En partant d'hypothèses opposées [12], c'est-à-dire fondées uniquement sur le discret, le groupe Systema a développé les RA qui admettent pour structures sous-jacentes les BCR. Il est amusant et réconfortant de constater que ce sont les mêmes structures (*cf.* [2] et [13])!

Une remarque de M. Mendès-France, concernant l'observation et l'expérimentation en biologie, éclaire ce problème : « Observer, c'est jeter un regard pacifique sur la nature » [14]. Pour avoir ce regard pacifique, l'observateur doit rechercher de « bonnes » structures qui l'adaptent au système observé et le transforment en un « observateur-acteur » (ce concept est souvent utilisé par des spécialistes en sciences humaines tels que M. Crozier [15]; il est aussi mentionné dans la première publication du groupe Systema [12]). Le protocole expérimental devient alors très différent de celui adopté par les physiciens. Parce que ces scientifiques cherchent à isoler un système ou à le relier dans la mesure du possible à un environnement artificiel contrôlé, ils ne peuvent

1. Des rappels sont donnés en annexe.

décrire que des systèmes inanimés ou paraissant l'être. Bien différente devrait être l'attitude des observateurs-acteurs pacifiques en biologie et dans les sciences humaines car le respect de la vie devrait être leur souci primordial. Mais renoncer aux méthodes scientifiques des physiciens leur pose de réelles difficultés car, in fine, c'est l'usage inconditionnel des référentiels spatiotemporels objectifs de la physique qui est en cause.

L'observateur-acteur pacifique privilégié d'un système est l'environnement avec lequel il est adapté. Cet environnement diffère habituellement de celui contenant un être humain ou un système introduit par lui. Dans un cas général, un observateur-acteur présente un caractère pacifique si les « rythmes sous-jacents » de l'ensemble « système + environnement » ne sont pas modifiés par sa présence, le mot « rythme » prenant sens dans des référentiels subjectifs internes et non pas dans le référentiel objectif externe des physiciens. Pour préciser cette notion, nous devons bâtir un modèle dans lequel sont schématisés le système, son environnement naturel et le système d'observation, puis le mettre en œuvre, comparer les résultats à ceux obtenus par d'autres observateurs-acteurs, le remanier et recommencer. A la limite, un « observateur-acteur » ne saura donc jamais s'il est devenu vraiment pacifique mais chercher à le devenir est une attitude qui, à coup sûr, le change profondément !

1.2. *Modèle le plus simple*

Prenons au point de départ le RA à N variables principales X_μ le plus simple.

• *Son support* est quadratique et homogène; il y a une seule variable d'environnement V :

$$\{P(\sum G_{\mu\nu} X_\mu X_\nu) + D(\sum_{i \in I} G_{ii} B_i X_i + V)(\sum_{r \in N-I} G_{rr} B_r X_r + V)\} = \{-\}_0 \quad (1)$$

P et les $G_{\mu\mu}$ sont des entiers non nuls. $(G_{\mu\nu} + G_{\nu\mu}) = 2G_{\mu\nu}$, D et les B_μ sont des entiers relatifs. La forme $P(\sum G_{\mu\nu} X_\mu X_\nu)$ caractérise le BCR sous-jacent. N est l'ensemble des indices des N variables X_μ. Les sous-ensembles I et $N-I$ contenant chacun au moins un indice réalisent une partition de N. Dans le réalisent une partition de N cas le plus simple, D, les $G_{\mu\mu}$ et les B_μ sont premiers avec P. Le second membre $\{-\}_0$ est un entier qui, si les paramètres sont fixés, est déterminé par un seul (N+1)-uple initial $X_\mu(0)$, V(0). De façon plus générale, cet entier résume un ensemble de valeurs initiales (pouvant concerner différentes valeurs des paramètres et différents (N+1)-uples initiaux); c'est l'origine du symbole utilisé.

• *Les valeurs initiales* canoniques s'écrivent :

$$X_\mu(0) = x_{\mu_0} P^K, \qquad V(0) = v_0 P^K \quad (2)$$

D'après une extension de résultats établis en [1], elles vérifient en classe (0) les deux conditions de verrouillage de type (α) suivantes [1] :

$$\left.\begin{aligned} (\sum_{i \in I} G_{ii} B_i x_{i_0} + v_0) &\neq 0 \bmod (P), \\ (\sum_{r \in N-I} G_{rr} B_r x_{r_0} + v_0) &\neq 0 \bmod (P) \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

et un ensemble fini de conditions quadratiques en B_μ, calculables à partir du groupe de Weyl du BCR sous-jacent (*cf.* F. Chauvet [16]).

• *Le RA fonctionne* par alternance régulière des produits de réflexions suivants :

$$(\prod \mathscr{H}_i \ddagger) \quad \text{et} \quad (\prod \mathscr{H}_r \ddagger). \quad (4)$$
$$\leftarrow \qquad\qquad \leftarrow$$

L'ordre des réflexions du produit $\prod \mathscr{H}_i$ (resp. $\prod \mathscr{H}_r$) doit être fixé sauf si elles commutent. La flèche caractérise le sens de lecture de la séquence de réflexions; ‡ représente une réflexion $\mathscr{H}_v$ le long du vecteur environnement [1], qui est intercalée si et seulement si en son absence le résultat de la première réflexion de $\prod \mathscr{H}_i$ (resp. $\prod \mathscr{H}_r$) n'est pas entier. Dans ces conditions, le résultat des opérateurs (4) est toujours entier : c'est la propriété fondamentale des relateurs arithmétiques stabilisés (RA).

1.3. *Agrandissement et finesse d'une description engendrée séquentiellement*

D'après une extension des résultats de [1], le fonctionnement de classe (0) est cyclique. Le nombre de réflexions principales $\mathscr{H}_\mu$ effectuées est appelé longueur du cycle $\boldsymbol{L}_K$. Le cycle $\boldsymbol{L}_{K+1}$ contient tous les états du cycle $\boldsymbol{L}_K$ dans la mesure où toutes les composantes de $\boldsymbol{L}_K$ sont multipliées par P. Par conséquent, les points de composantes rationnelles :

$$X_\mu/P^K, \quad V/P^K \quad (5)$$

du cycle $\boldsymbol{L}_K$ se retrouvent exactement dans les différents cycles $\boldsymbol{L}_{K'}$ pour $K' > K$. Un accroissement de K augmente donc la finesse de la description

1. La définition d'une classe de fonctionnement et de l'expression « réflexion le long de... » est donnée en annexe.

engendrée séquentiellement par le RA. L'effet de K doit être distingué d'un simple agrandissement n'apportant pas d'états supplémentaires. On prend en compte cet agrandissement en modifiant l'hypothèse « D premier avec P ». En effet, si (1) est multipliée par un entier E premier avec P, le fonctionnement du RA n'est pas modifié, mais la longueur de chacun des vecteurs de base du réseau associé à (1) est multipliée par $\sqrt{E}$.

1.4. *Observation d'un système par son environnement « naturel »*

L'environnement ne perçoit le système qu'au moment d'un appel $\mathscr{H}_v$; il constate que V est transformé en V* [1] :

$$V^* = -V - \sum_{\mu \in N} G_{\mu\mu} B_\mu X_\mu \tag{6}$$

L'état du système (caractérisé par les N composantes X_μ) ne peut pas être déduit d'une seule variation de V. Cette situation conduit à plusieurs interrogations :

- Est-il possible d'exploiter une suite de variations successives de V quand les rythmes sous-jacents sont connus?
- Si plusieurs RA fonctionnent en synchronisme, ont même second membre et sont caractérisés par des coefficients P_α, D_α, $B_{\alpha\mu}$ voisins et différents (*cf.* modélisation d'une configuration florale, [76], [6, p. 474], due à Cl. Vallet), peut-on tirer parti de certaines relations de voisinage?
- Si le RA a une structure biquadratique et si en certains points X_μ il fonctionne en B_μ, la détermination des X_μ est-elle facilitée?

Ces interrogations évoquent des problèmes quantiques. Par exemple, l'obtention des B_μ soulève des difficultés analogues à celle des X_μ : dans la modélisation la plus schématique d'une particule matérielle se propageant à vitesse constante [17], [18] les B_μ sont associés aux impulsions; ce qui est observé au niveau de l'environnement est une variation de V qui a la dimension du produit d'une longueur par une impulsion, c'est-à-dire d'une variation de l'action.

Un autre problème concerne l'évaluation de K au moment d'un appel à l'environnement car ce paramètre, défini dans des conditions initiales canoniques, est caché sous la forme d'un emboîtement de congruences modulo P, modulo P^2, ..., modulo P^K. Pour P premier, l'outil mathématique approprié

1. L'idée de modéliser de cette manière un phénomène d'observation résulte de discussions avec F. Chauvet.

à l'étude d'un tel emboîtement est la théorie des entiers *p*-adiques. L'idée d'utiliser les nombres *p*-adiques en physique ne date pas d'aujourd'hui! Un arithméticien, Ch. Pisot, l'a exprimée vers 1970 [1]. Elle est aussi mentionnée dans plusieurs publications du groupe Systema, par exemple en [19]. Dans un livre paru récemment [20], A. Connes attire l'attention de J.-P. Changeux sur la possibilité de leur application en biologie. Il faut aussi signaler que des publications techniques, telles que [21], commencent à exploiter les nombres *p*-adiques en physique. Mais les physiciens ne semblent pas avoir encore pris suffisamment conscience de la révolution que leur usage va entraîner.

1.5. *Observation objective d'un système*

Pour essayer de connaître les X_μ, on peut aussi augmenter le nombre des variables d'environnement V_α, c'est-à-dire introduire des observateurs-acteurs supplémentaires. Si les dispositifs de mesure n'interagissent pas directement les uns avec les autres, le BCR d'environnement ne comporte pas de terme croisé en $V_\alpha V_\beta$. Le support du RA s'écrit :

$$\Big\{\prod_\alpha P_\alpha \Big[\Big(\sum G_{\mu\nu} X_\mu X_\nu\Big) + \sum_\alpha (D_\alpha / P_\alpha) \times \Big(\sum_{i \in I_\alpha} G_{ii} B_{\alpha_i} X_i + V_\alpha\Big)\Big(\sum_{r \in N - I_\alpha} G_{rr} B_{\alpha_r} X_r + V_\alpha\Big)\Big]\Big\} = \{-\}_0 \tag{7}$$

Il y a en tout au moins N variables V_α; l'indice $\alpha = 1$ repère l'environnement naturel. Par souci de simplicité, les P_α sont des nombres premiers, tous différents les uns des autres. Les conditions initiales canoniques généralisent (2) sous la forme :

$$X_\mu(0) = x_{\mu 0} \prod_\alpha P_\alpha^{K_\alpha}, \qquad V_\alpha(0) = v_{\alpha 0} \prod_\alpha P_\alpha^{K_\alpha} \tag{8}$$

Les RA ayant pour support (1) et (7) peuvent avoir un fonctionnement isomorphe si tous les exposants K_α sont égaux (cette condition n'est généralement pas suffisante). Si ce fonctionnement se manifeste, $\mathscr{H}_v$ est remplacé dans (4) par le produit commutatif $\prod_\alpha \mathscr{H}_\alpha$. Dans le cas contraire, le système d'observation peut perturber considérablement les rythmes internes.

Les coefficients $B_{\alpha\mu}$ (pour $\alpha > 1$) doivent être fixés de façon que le système d'équations linéaires en X_μ, généralisant (6), soit d'ordre N. Pour qu'il y ait mesure objective des X_μ, il faut, de plus, que les $(N-1)$ observateurs-acteurs puissent communiquer. Cette contrainte implique la dégénérescence de la

1. Information communiquée par le Professeur R. Vallée qui est vivement remercié.

forme en X_μ, V_α. Elle détermine (*cf.* [17], p. 285) la longueur d'onde de De Broglie en provoquant une modification profonde du système observé.

2. Niveaux de structuration

Le respect des rythmes internes du système observé fait émerger des niveaux « d'observation pacifique » qui, d'après le raisonnement précédent, sont des niveaux de structuration du système couplé à son environnement naturel. Connaître ces rythmes est un problème insoluble rigoureusement. Essayons de l'aborder en supposant que l'observateur fait partie du système et en raisonnant sur le RA le plus simple qui est noté dans la suite $\mathscr{R}$. Ce RA a pour support :

$$\{P(X^2+Y^2)+D(AX+V)(BY+V)\}=\{-\}_0 \tag{9}$$

et fonctionne, en classe (0), par alternance régulière de $(\mathscr{H}_x \overset{\leftarrow}{\ddagger})$, $(\mathscr{H}_y \overset{\leftarrow}{\ddagger})$ à partir des valeurs initiales canoniques :

$$X(0)=x_0 FP^K, \qquad Y(0)=y_0 FP^K, \qquad V(0)=v_0 FP^K \tag{10}$$

P est un nombre premier; D, A, B sont premiers avec P. Le PGCD de x_0, y_0, v_0 et F ne sont pas divisibles par P. Afin d'alléger les notations, $\mathscr{H}_x$, $\mathscr{H}_y$, $\mathscr{H}_v$ sont notés respectivement **i**, **r**, **V**.

2.1. *Conjugaison*

Par hypothèse, les rôles du système « observateur-acteur » et du système « observé » sont permutables. D'un point de vue mathématique, il faut trouver des transformations conservant le BCR sous-jacent, le BCR d'environnement, la structure stabilisée et le second membre de $\mathscr{R}$. Ce problème a été résolu arithmétiquement par L. Nottale [22], puis interprété géométriquement par M. Ferré [23]. Un ensemble de transformations est engendré par changements de signe (de A, B, X, Y) et par permutation (de A et de B). Chacune d'elles réalise une conjugaison de deux RA qui dépend du choix du référentiel commun adopté; ce choix réalise un recalage des référentiels. Dans la suite, nous considérerons seulement la permutation de A et de B; un RA $\mathscr{R}'$, conjugué de $\mathscr{R}$, fonctionne par alternance régulière de $(\mathbf{i}' \overset{\leftarrow}{\ddagger})$, $(\mathbf{r}' \overset{\leftarrow}{\ddagger})$ et admet pour support et pour valeurs initiales canoniques :

$$\{P(X'^2+Y'^2)+D(BX'+V')(AY'+V')\}=\{-\}_0 \tag{11}$$

$$X'(0)=x'_0 P^K, \qquad Y'(0)=y'_0 P^K, \qquad V'(0)=v'_0 P^K \tag{12}$$

Deux recalages, conservant le vecteur environnement, sont privilégiés :

- L'un ne modifie pas le plan des axes OX, OY. La conjugaison, notée F'_N (*cf.* [22], p. 64 et [23], p. 88-89), implique une division par l'entier F_N, premier avec P. Il faut donc prendre $F=F_N$ afin que les composantes (12) soient entières.

$$F_N=P(A^2+B^2)-DA^2B^2 \tag{13}$$

- L'autre conserve le repère propre défini en [23]. La conjugaison notée F'_F (*cf.* [23], p. 70) implique une division par l'entier P_0 qui est supposé premier avec P. Il faut donc prendre $F=P_0$

$$P_0=(A^2+B^2) \tag{14}$$

2.2. *Rappel sur les séquences réduites*

Par construction, les points initiaux de $\mathscr{R}$ et de $\mathscr{R}'$ coïncident. Les autres points engendrés simultanément par $\mathscr{R}$ et $\mathscr{R}'$ sont déterminés au moyen de séquences réduites de Nottale [24]. Rappelons très brièvement l'origine de cette notion dans le cas simplifié du RA ayant pour support (11), fonctionnant en classe (0) à partir de (12).

Pour $K=1$, $\boldsymbol{L}_{1_i}=\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{C}_i$ ou bien $\boldsymbol{L}_{1_r}=\boldsymbol{C}_r\boldsymbol{C}_r$ selon la première réflexion choisie **i** ou **r**. $\boldsymbol{C}_i$ et $\boldsymbol{C}_r$ sont les cellules de Luminet [1] [1] :

$$\boldsymbol{C}_i=(\underrightarrow{\mathbf{iVrViVr}})=\mathbf{V}, \qquad \boldsymbol{C}_r=(\underrightarrow{\mathbf{rViVrVi}})=\mathbf{V} \tag{15}$$

Les réflexions **i**, **r**, **V** sont des involutions : $\mathbf{i}^2=\mathbf{r}^2=\mathbf{V}^2=\mathbf{1}$. (16)

Pour obtenir le cycle $\boldsymbol{L}_2$ à partir de $\boldsymbol{L}_1$, on remplace **V** par l'une des deux cellules (15) de façon que l'alternance de **i** et de **r** soit strictement respectée. Dans le cas d'un démarrage par **i** :

$$\boldsymbol{L}_{2_i}=[\underrightarrow{\mathbf{iC}_r}\,\mathbf{rC}_i\,\mathbf{iC}_r\,\mathbf{r}]^2=[\underrightarrow{\mathbf{i}}\,(\mathbf{rViVrVi})\,\mathbf{r}\,(\mathbf{iVrViVr})\,\mathbf{i}\,(\mathbf{rViVrVi})\,\mathbf{r}]^2 \tag{17}$$

Le procédé de construction de $\boldsymbol{L}_{K+1}$ à partir de $\boldsymbol{L}_K$ est identique. La longueur des cycles croît donc exponentiellement avec K. Soit $\mathbf{S}(\tau)$ la portion de $\boldsymbol{L}_K$ obtenue « naturellement » (c'est-à-dire en respectant les règles de

1. D'après le théorème de l'effet miroir de M. Ferré [25], les cellules (15) reflètent le cycle $(\mathbf{i}^0\mathbf{r}^0)^{g/2}=\mathbf{1}$ engendré par le BCR sous-jacent ($g=4$ dans l'exemple traité). $\mathbf{i}^0$ est remplacé par **ViV** et $\mathbf{r}^0$ par **r**; ou bien $\mathbf{i}^0$ est remplacé par **i** et $\mathbf{r}^0$ par **VrV**. Puisque **V** est une involution, $\mathbf{V}^{-1}=\mathbf{V}$; $\mathbf{i}=\mathbf{V}^{-1}\mathbf{i}^0\mathbf{V}$ signifie que **i** et $\mathbf{i}^0$ sont conjugués (au sens de la théorie des groupes).

fonctionnement du RA) après τ réflexions principales **i** ou **r**. En général, la longueur de $\mathbf{S}(\tau)$ peut être réduite car, si une cellule apparaît dans $\mathbf{S}(\tau)$, elle est remplaçable par **V**. L'itération du procédé fournit la séquence réduite **$**. L. Nottale a montré que, dans le cas du RA considéré et pour un état appartenant au premier demi-cycle, **$** est constituée par une suite d'au plus K séquences partielles notées **0**, **1**, **2** et **3**, l'alternance de **i** et de **r** étant strictement respectée; **3** ne peut apparaître qu'en fin de séquence. On obtient les séquences réduites du deuxième demi-cycle en ajoutant la séquence **3** devant celles du premier cycle.

$$\left.\begin{array}{lll} \mathbf{0} \text{ représente } \mathbf{i} & \text{ou} & \mathbf{r} \\ \mathbf{1} \text{ représente } \mathbf{iVr} & \text{ou} & \mathbf{rVi} \\ \mathbf{2} \text{ représente } \mathbf{iVrVi} & \text{ou} & \mathbf{rViVr} \\ \mathbf{3} \text{ représente } \mathbf{V}=\mathbf{iVrViVr}=\mathbf{rViVrVi} & & \end{array}\right\} \quad (18)$$

Le chiffre codant chacune des séquences (18) représente le nombre de **V** qu'elle contient. Son utilisation est justifiée par l'algorithme de L. Nottale (au moyen d'une suite de divisions euclidiennes [1] dépendant de K, cet algorithme donne directement la séquence codée du τ-ième point du premier demi-cycle si la classe de fonctionnement et K sont connus, *cf.* [24], p. 40-42).

2.3. *Détermination des points de coïncidence*

Dans le cas du recalage étudié par L. Nottale, les réflexions **V** et **V′** ont le même effet puisque l'axe d'environnement est conservé. Les rotations **ir** et **i′r′** ont aussi le même effet parce que les axes OX, OY et OX′, OY′ font le même angle, sont situés dans le même plan et que les axes OV, OV′ coïncident. Même conclusion pour **ri** et **r′i′**. Finalement, toutes les séquences réduites, qui sont des concaténations de **V**, de **ir** et de **ri**, transforment un point commun à $\mathscr{R}$ et à $\mathscr{R}'$ en un autre point commun.

1. La division euclidienne est la division avec reste, utilisée en arithmétique élémentaire.

D'après (15) et (16), **2** peut s'écrire en fonction de la première réflexion imposée :

$$\left.\begin{array}{ll} & \mathbf{2}=\mathbf{iVrVi}=\mathbf{VrV} \\ \text{ou bien} & \mathbf{2}=\mathbf{rViVr}=\mathbf{ViV} \\ & \\ & \mathbf{22}=\mathbf{iVrVirViVr}=\mathbf{VriV} \\ \text{ou bien} & \mathbf{22}=\mathbf{rViVriVrVi}=\mathbf{VirV} \end{array}\right\} \quad (19)$$

22 réalise donc une rotation encadrée de deux réflexions **V**. Mais cette rotation s'effectue dans un sens opposé à celui imposé dans la construction des séquences réduites. Ce résultat paraît surprenant à première vue car il peut être interprété comme une inversion locale de la flèche du « temps interne » [1]. En fait, il traduit simplement une imbrication régulière de niveaux, engendrée par l'adaptation à l'environnement.

Les séquences **00**, **010**, **0110**, **01110**, etc., **22**, **212**, **2112**, **21112**, etc. et toutes les séquences obtenues par répétition et concaténation conviennent donc. De plus, **3** peut être ajouté en début et en fin de séquence.

Nous n'avons pas prouvé que ces séquences étaient les seules qui réalisaient des coïncidences, mais les calculs effectués sur ordinateur semblent montrer la validité de cette proposition réciproque.

L'arbre, déduit d'un point initial commun canonique, a été construit pour $1 \leqq K \leqq K_{max}$ à partir des coïncidences repérées numériquement sur ordinateur (à K fixé); puis les séquences réduites correspondantes ont été calculées. En admettant la réciproque énoncée ci-dessus et en exprimant que les séquences réduites spécifiques du niveau K comportent exactement K chiffres dans le premier demi-cycle, on peut déterminer les règles de production d'un langage formel, puis reconstruire cet arbre directement.

Si le point initial commun n'appartient pas à l'ensemble trouvé précédemment, les fonctionnements de $\mathscr{R}$ et de $\mathscr{R}'$ ne sont généralement pas isomorphes. La longueur L_{τ_0} du cycle engendré par $\mathscr{R}$ et celle $L_{\tau'_0}$, relative à $\mathscr{R}'$, sont donc généralement différentes. Les coïncidences ont lieu tant qu'une désynchronisation ne s'est pas produite. Elles réapparaissent après un grand nombre de réflexions principales égal au PPCM de L_{τ_0} et de $L_{\tau'_0}$. Dans les cas

1. Ce point important sera approfondi dans un autre article.

particuliers étudiés, la structure des séquences limitées par la désynchronisation est seulement fonction de τ_0 (position du point initial commun dans le cycle L_K, repérée à partir du point initial canonique); elle ne dépend pas de la valeur numérique des paramètres P, D, A, B. Si cette constatation résulte effectivement d'une propriété générale, ces séquences peuvent être considérées comme des mots d'un langage, qui sont mémorisables par τ_0 ou par la séquence réduite associée à τ_0.

Dans le cas du recalage étudié par M. Ferré, les résultats sont différents. Les séquences réduites des points communs du premier demi-cycle sont **1**, **11**, **111**, **1111**, etc., complétées ou non par **3**; celles du deuxième demi-cycle s'en déduisent par adjonction de **3** en début de séquence. M. Ferré a prouvé géométriquement [26] que ces séquences fournissaient des points communs. D'après les études faites sur ordinateur, il semble qu'il n'y en ait pas d'autres, mais cette réciproque n'a pas non plus été prouvée. Des produits de recalages sont applicables si l'entier F introduit dans (10) est divisible par $(F_N P_0)^h$. Il existe aussi des recalages qui ne conservent pas l'axe d'environnement (le plus simple produit une ramification [23])...

3. Niveaux structurant le fonctionnement

3.1. *Champ morphogénétique*

L'étude d'un fonctionnement n'est pas réductible à celle de rythmes sous-jacents car l'évolution de divers sous-systèmes évoluant en parallèle et les contraintes de voisinage doivent être prises en compte. Il y a équilibre de différentes descriptions : les unes ont un caractère « potentiel », les autres provoquent la « dynamique ». Par certains aspects, cet équilibre est analogue aux relations « forces-flux » de la physique. Des « descriptions parallèles » jouent le rôle d'un champ morphogénétique [1] et sont caractérisées par une seule séquence réduite (simulant un brin d'ADN); des « descriptions séquentielles » sont engendrées par des RA étirés (*cf.* [6], p. 476-478) et produisent des « éléments structurés de déplacement » (ESD). La taille de ces ESD dépend de séquences engendrées par la coïncidence de deux RA car elles déclenchent ou non l'alternance des réflexions associées à l'étirement. Ces séquences sont des messages chimiques, sonores, électromagnétiques, ... qui maintiennent la vie de l'organisme vivant, en contrôlant sans cesse les

1. Une notion de « champ morphogénétique » a été formalisée par R. Thom au moyen de la théorie des catastrophes [74], p. 169-174, [75], p. 12-13. La liaison entre théorie des catastrophes et RA est abordée par Ph. Riot en [2] et [13].

actions nécessaires. Elles trouvent leur cohérence dans un langage associé au fonctionnement du système. L'équilibre biologique présente donc trois aspects : « potentiel », « dynamique » et « linguistique ».

Deux procédés fournissent des « descriptions parallèles ». L'un d'eux est issu de considérations biologiques et s'applique aux organismes pluricellulaires. Une séquence réduite privilégiée (pouvant être l'identité) est appliquée aux états dont les transformés vérifient certaines compatibilités de voisinage (cas des configurations florales élaborées par Cl. Vallet [76] et représentées notamment en [6], p. 474, et des formes évoquant le développement d'un embryon, *cf.* figure 1 extraite de [27]). Le second membre est mis en relation avec le temps des physiciens; les niveaux de structuration sont introduits par la séquence réduite. Dans l'autre procédé qui a une origine physique (modélisation d'un écoulement tourbillonnaire torique), est exprimée une possibilité de fonctionnement bi- ou multi-quadratique. Dans certains cas limites, le second membre représente une fonction de courant; les niveaux de structuration sont introduits par le biais de domaines multiplicatifs [1]. Les formes sont de type cellulaire (*cf.*, en [28], esquisses de cellules neuronales et gliales; l'une d'elles est présentée sur la figure 2).

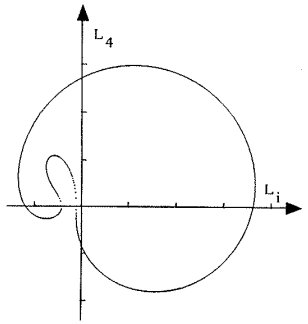


Figure 1

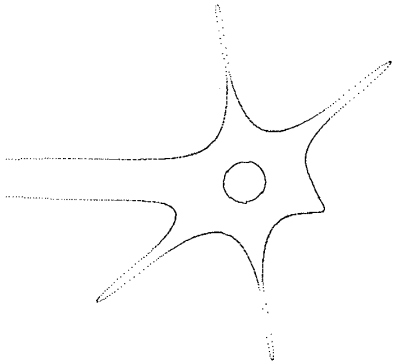


Figure 2

3.2. *Liaison avec les attracteurs fractals*

Une dynamique est décrite classiquement par un système d'équations différentielles ordinaires ou aux dérivées partielles. Un exemple typique est la théorie des systèmes de transformations de P. Delattre [29] qui est applicable en chimie et en biologie. Des classes d'équivalence sont déterminées, puis on

1. Un très bref rappel sur les domaines multiplicatifs est donné en annexe.

exprime des échanges entre classes voisines. La prise en compte d'imbrications de niveaux est actuellement développée par P. Auger [30]. Dans le cadre des RA, un élément différentiel est remplacé par un ESD. Certains d'entre eux sont liés aux attracteurs fractals.

Soit $\mathscr{R}$ un RA à support non dégénéré. Il est transformé en un RA « étiré » $\hat{\mathscr{R}}$ de corang 1 si le nombre des variables d'environnement ou celui des variables principales est accru d'une unité et si le support de $\hat{\mathscr{R}}$ est dégénéré quelle que soit la valeur des paramètres caractérisant $\mathscr{R}$. Cette idée très féconde est due à J. Chastang [31], [32]. Dans le cas du RA ayant pour support (9), le remplacement de X par $X+\eta Z$ et de V par $W-\eta AZ$, avec $\eta=\pm 1$ et alternance régulière de $(\mathscr{H}_x \underset{\leftarrow}{\ddagger})$, $(\mathscr{H}_z \mathscr{H}_y \underset{\leftarrow}{\ddagger})$, « étire » $\mathscr{R}$ selon la variable principale X (la transformation est analogue dans le cas de Y); $\hat{\mathscr{R}}$ admet, pour structure sous-jacente, non pas un BCR mais un Relateur de Base Parabolique (PBR en abrégé) [1]. Par ailleurs, le remplacement de V par $V+\eta U$, avec alternance régulière de $\mathscr{H}_v$, $\mathscr{H}_u$, « étire » $\mathscr{R}$ selon la variable d'environnement V. Examinons le premier type « d'étirement » dans le cas particulier où $\mathscr{R}$ fonctionne en classe (0). Les expressions (9) et (10) sont remplacées par :

$$\{P[(X+\eta Z)^2+Y^2]+D(AX+W)(BY-\eta AZ+W)\}=\{-\}_0 \qquad (20)$$

$$X(0)=x_0 P^K, \qquad Y(0)=y_0 P^K, \qquad Z(0)=z_0 P^K, \qquad W(0)=w_0 P^K \qquad (21)$$

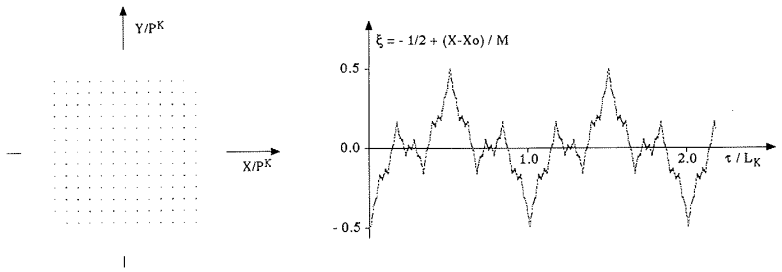
Le fonctionnement de $\hat{\mathscr{R}}$ est pseudocyclique mais sa classe de fonctionnement est la même que celle de $\mathscr{R}$ (cette propriété, qui n'est pas générale, provient du choix du BCR ayant pour support : X^2+Y^2). Chaque pseudocycle accroît X d'une quantité égale, par définition, à l'élément structuré de déplacement (ESD). J. Chastang a déterminé l'expression algébrique de cet ESD en [31]. Il est nul si la condition suivante est satisfaite :

$$8(x_0+\eta z_0)-2DA(Ax_0+\eta Az_0-By_0)/P=0 \qquad (22)$$

Les valeurs initiales de $\hat{\mathscr{R}}$ sont choisies de façon que l'ESD soit nul et que, pour $D/P\to 0$, les états de $\mathscr{R}$ soient situés au voisinage de l'axe d'environnement, sur la sphère d'équation (9). En effet, dans ces conditions particulières (cas du BCR : X^2+Y^2) et après des changements d'échelle, les

1. Alors que les BCR sont associés aux algèbres de Lie semi-simples, certains PBR sont associés aux algèbres de Kac-Moody [60]. Ce point a été approfondi par F. Chauvet, à la suite d'une suggestion du Professeur R. Thom.

amas d'ordre 1 se trouvent aux sommets d'un réseau homothétique (à une translation près) du réseau défini par le BCR sous-jacent; de plus, le fonctionnement de $\mathscr{R}$ se traduit, au premier ordre, par des règles simples de voisinage (cette propriété n'est pas vérifiée si le point initial est éloigné de l'axe d'environnement, *cf.* [33], p. 308-309; la comparaison de la figure 3 *a* et de celle donnée en [6], p. 471, *fig.* 2 *a*, fait apparaître les différences). La solution la plus simple consiste à prendre : $x_0=z_0=y_0=0$ et $v_0=1$, ce qui implique : $w_0=1$.



$P=1001$, $D=1$, $A=B=1$, $x_0=y_0=z_0=0$, $v_0=1$, $K=6$, $L_6=6(3^6-1)=4368$

Figure 3 a : $\mathscr{R}$: $\eta=0$ *Figure 3 b* : $\hat{\mathscr{R}}$: $\eta=-1$

Portons en abscisse le temps interne réduit τ/L_K, avec $L_K=6(3^K-1)$, et en ordonnée le déplacement réduit $\xi=-1/2+(X-X_0)/M$, avec $M=2AD v_0 P^{K-1}(3^K-K-1)$, ce déplacement étant engendré par $\hat{\mathscr{R}}$. On constate sur ordinateur que le « contenu » de cet ESD nul (c'est-à-dire l'ensemble stationnaire des états engendrés au cours d'un pseudocycle) converge, pour K grand, vers une courbe limite, *cf.* figure 3 *b*. Cette courbe (donnée sans explication en [6], p. 478) reflète le fonctionnement de $\mathscr{R}$ (*cf.* fig. 3 *a*). Elle peut être représentée approximativement par la série suivante :

$$\xi(\tau/L_K)=-\frac{1}{4}\Delta\left(\frac{\tau}{L_K}\right)-\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{p=K}\frac{1}{3^p}\Delta\left(\frac{3^p\tau}{L_K}\right), \qquad (23)$$

$\Delta(t)$ est la fonction triangulaire, prenant la valeur maximale $+1$ en $t=0$ et $t=1$ et la valeur minimale -1 en $t=1/2$. Pour $K\to\infty$, le deuxième terme de (23), noté $G(t)$, a la structure d'une fonction de Weierstrass dans laquelle $\cos(2\pi t)$ serait remplacée par $\Delta(t)$. On peut donc déterminer la codimension fractale du graphe auto-affine de $G(t)$. D'après les travaux de A. Le Méhauté et de C. Tricot, la fonction de Weierstrass présente un intérêt fondamental car il existe une relation entre la dimension fractale et la coupure dans l'ordre de dérivation fractionnaire (*cf.* [34], p. 79-82).

Le « contenu » de cet EDS nul est interprétable au moyen d'un « Iterated Function System » (IFS) de M. Barnsley [35]. Les IFS, qui exploitent différents travaux antérieurs mentionnés en [36], réalisent des interpolations fractales (cette notion est définie en [35], p. 211-212). Dans le cas bidimensionnel, un IFS est représenté par un ensemble fini d'applications affines w_i :

$$w_i\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_i & b_i\\c_i & d_i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}e_i\\f_i\end{pmatrix} \tag{24}$$

qui sont mises en œuvre de façon pseudo-aléatoire [1]. La fonction fractale d'interpolation est l'attracteur fractal associé à l'IFS. Dans le cas particulier où les b_i sont nuls, on peut calculer la dimension fractale de l'attracteur à partir de l'expression des w_i si leur nombre est minimal. Cette approche est mentionnée par R. Delannay, J.-F. Thovert, P. Adler dans le numéro spécial de la *Revue Internationale de Systémique* consacré à la systémique mathématique [37], p. 491-492. Les 4 applications w_i suivantes, qui ne constituent pas un système minimal, engendrent de façon pseudo-aléatoire le « contenu » de l'ESD considéré :

	a	b	c	d	e	f
w_1	1/3	0	4/3	−1/3	1/6	−1/3
w_2	−1/3	0	4/3	−1/3	5/6	−1/3
w_3	−1/3	0	4/3	1/3	1	−1
w_4	1/3	0	4/3	1/3	0	−1

4. Niveaux de synthèse

La description d'un système peut être faite à des niveaux de synthèse différents. Plusieurs types de changement de niveaux sont envisageables, *cf.* [6], p. 475 :

- Les variables d'environnement du niveau N (ou des combinaisons linéaires de ces variables) deviennent des variables principales du niveau N+1.

1. Disons, de façon plus précise, que la mise en œuvre sur ordinateur implique l'usage de nombres pseudo-aléatoires équidistribués. Divers procédés d'obtention de tels nombres sont donnés par J. Maurin en [77], p. 45-65. L'un d'eux consiste à résoudre une récurrence dans le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (p étant un nombre premier). Le lien entre cette simulation pseudo-aléatoire et la notion de fonction pseudo-aléatoire introduite par J. Bass est abordé en [78], p. 96-97 dans le cadre de la méthode de Monte-Carlo.

- Des produits de formes quadratiques sont réduits algébriquement à une seule forme quadratique quand il y a domaine multiplicatif quadratique.

- Une population de systèmes évoluant en parallèle est représentée globalement, de façon séquentielle, par un système générique (*cf.* [6], p. 478). En particulier, une configuration parallèle obtenue au moyen d'une séquence réduite $\mathbb{S}$ est résumée par le point d'une description séquentielle qui a pour séquence réduite $\mathbb{S}$.

4.1. *Niveau de synthèse associé au système de racines d'un groupe de Lie*

Afin d'aborder classiquement ces changements de niveaux, partons d'une famille particulière de groupes de Lie SO(p, q) (qui concernent les transformations orthogonales de déterminant +1). La structure invariante fondamentale de SO(p, q) est la forme quadratique :

$$\sum_{i=1}^{i=p} x_i^2-\sum_{j=1}^{j=q} x_j^2, \tag{26}$$

où p et q sont des entiers $\geqq 0$, l'un d'eux n'étant pas nul. La forme quadratique (26), le groupe SO(p, q) et un ensemble d'états initiaux déterminent un premier niveau de synthèse. Par exemple, le groupe de Lorentz SO(3, 1) (qui conserve la métrique de la relativité restreinte à 3 composantes spatiales et à une composante temporelle), représente un ensemble infini de référentiels de même origine, positionnés les uns par rapport aux autres au moyen d'angles et de vitesses relatives.

Un deuxième niveau de synthèse est fourni par le système de racines de l'algèbre de Lie associée au groupe de Lie considéré. Dans le cas des algèbres simples, il est caractérisé par un graphe de Dynkin connexe qui représente une forme quadratique à coefficients entiers, un groupe fini de transformations appelé groupe de Weyl et un système particulier de vecteurs de base. C'est à ce niveau de synthèse que se situe la liaison proposée par Ph. Riot [2] et approfondie par F. Chauvet [3] : les BCR à l dimensions, connexes et à support homogène, sont mis en correspondance avec les systèmes de racines des algèbres de Lie complexes simples ayant un graphe de Dynkin à l sommets. Chaque racine α repère un opérateur E_α dans la base de Cartan-Weyl (rappelons qu'il y a l opérateurs H_i qui commutent entre eux et qui ne commutent pas avec les E_α). Un système de racines peut être associé à plusieurs groupes de Lie ayant, après extension complexe, des algèbres de Lie isomorphes. Ainsi, les groupes SO(n, 0) (en abrégé SOn) et les groupes SO(p, q) tels que $p+q=n$, bien qu'ils ne soient pas isomorphes, peuvent être

associés au même système de racines (*cf.* par exemple, B. G. Wybourne [38] p. 167-173).

4.2. *Interprétation d'un système de poids au moyen d'un RA*

Certaines parties du support d'un RA stabilisé (qui diffèrent du BCR sous-jacent) sont aussi interprétables au moyen d'un système de racines. Montrons que les coefficients B_μ de (1) sont directement liés aux composantes d'un poids (défini notamment en [38] et [39]). Par hypothèse, le BCR est choisi de façon que ses vecteurs de base $\mathbf{e}^0_\mu$ soient ceux représentés par un graphe de Dynkin.

Certains vecteurs de base $\mathbf{e}_\mu$ du réseau associé à (1) sont transformés par effet miroir [25] afin que le nouveau référentiel soit constitué par les vecteurs $\mathbf{e}^0_\mu$ du BCR sous-jacent et par le vecteur environnement $\mathbf{e}_v$ inchangé. Cette transformation revient à remplacer par V^0 l'un des 2 facteurs de stabilisation (contenant V). Choisissons le premier; puis remplaçons les B_i par $-B^0_i$ et les B_r par B^0_r. Après division par P, (1) devient :

$$\{(\sum G_{\mu\nu} X_\mu X_\nu) + (D/P)(\sum_{\mu \in N} G_{\mu\mu} B^0_\mu X_\mu + V^0) V^0\} = (1/P)\{-\}_0 \qquad (27)$$

Le support homogène du BCR sous-jacent est donc complété par des termes du premier degré en X_μ provenant de la stabilisation. Pour que l'expression (27) en X_μ caractérise un BCR inhomogène, D étant premier avec P, il faut que V^0 soit divisible par P (c'est la condition de démarrage du RA la plus typique). Au système de racines α, descriptible dans la base $\mathbf{e}^0_\mu$ au moyen du BCR sous-jacent, est associe le système $\alpha^\vee$ (appelé « système inverse » dans la terminologie bourbakiste *cf.* [39], p. 143). Les $\mathbf{e}^0_\mu$ sont remplacés par $(G_{\mu\mu}/2)\,\mathbf{e}^{0\vee}_\mu$ et les X_μ par $2X^\vee_\mu/G_{\mu\mu}$. La base duale des $\mathbf{e}^{0\vee}_\mu$ est constituée par les vecteurs ϖ_μ introduits dans la théorie des poids de C. Chevalley, *cf.* [38], p. 87-91. Les entiers $(DV^0/P)\,B^0_\mu$ sont les composantes d'un poids $\mathbf{B}^0$ dans la base des ϖ_μ. On en déduit les composantes de $\mathbf{B}^0$ dans la base des $\mathbf{e}^0_\mu$, qui peuvent être rationnelles.

A une représentation d'un groupe de Lie est associé un ensemble $\boldsymbol{B}^0$ de poids. Soit $\mathbf{B}^0$ un de ces poids repéré par ses composantes B^0_μ. A partir d'un vecteur initial $\mathbf{X}(0)=0$, le BCR supporté par (27) engendre pour V^0 non nul un ensemble de $\mathbf{X}(\tau)$ par le jeu de réflexions le long des $\mathbf{e}^0_\mu$ (c'est-à-dire par action du groupe de Weyl affine); τ est le nombre de réflexions principales effectuées. Ensuite, les $\mathbf{X}(\tau)$ sont interprétés comme de nouveaux poids $\mathbf{B}^{0\prime}(\tau)$ pour $\mathbf{X}'(\tau)=0$. Ces opérations sont une transposition d'une partie des règles engendrant les poids dans la théorie classique. Le carré de $\mathbf{B}^{0\prime}(\tau)$ reste égal à $\mathbf{B}^{02}$ quand τ varie. Il résume donc arithmétiquement un ensemble d'états qui

contient un sous-ensemble de $\boldsymbol{B}^0$. Nous disons qu'il porte une information virtuelle ou encore qu'il est un « nombre d'information virtuelle ».

Prenons un exemple en physique quantique, celui du groupe SU3. On considère que certaines particules peuvent être considérées comme des états différents d'une même particule, définie par une représentation irréductible d'un groupe de symétrie unitaire unimodulaire (det $= +1$). Le système de racines associé à SU3 est donné par le graphe de Dynkin o———o. Le support du BCR sous-jacent est donc $(X^2 - XY + Y^2)$ et (27) s'écrit :

$$(X^2 - XY + Y^2) + (D/P)(A^0 X + B^0 Y + V^0) V^0 = (1/P)\{-\}_0 \qquad (28)$$

La plus petite valeur du carré $\mathbf{B}^{02} = (4/3)(D^2 V^{02}/4P^2)(A^{02} + A^0 B^0 + B^{02})$ est obtenue, à D, P, V^0 fixés, pour $(A^{02} + A^0 B^0 + B^{02}) = 1$. A partir de la solution particulière $A^0 = 1$, $B^0 = 0$, le BCR engendre pour $\mathbf{X}(0) = 0$ et $DV^0/P = 1$ trois valeurs de (X, Y) : (2/3, 1/3), $(-1/3, 1/3)$, $(-1/3, -2/3)$ qui déterminent respectivement trois valeurs de (A^0, B^0) : celle choisie (1, 0) et deux nouvelles $(-1, 1)$, $(0, -1)$. A partir de $A^0 = 0$, $B^0 = 1$ sont obtenues trois autres solutions qui se déduisent des précédentes par changement du signe des composantes. Ces deux triplets correspondent aux deux représentations fondamentales de SU3 associées aux quarks et aux antiquarks et sont globalement résumés par 1; les composantes X, Y déterminent l'isospin et l'hypercharge.

Un ensemble de $\mathbf{B}^0$ différents peut être engendré séquentiellement si le RA est biquadratique, c'est-à-dire si P est proportionnel à une forme quadratique en B_μ. Dans le cas des RA à 2 variables principales et à une variable d'environnement (*cf.* [6], p. 468, expression 4), la forme qui est suggérée par les conditions de verrouillage (γ) de la classe (0) ou par le recalage de M. Ferré [23] est proportionnelle [1] à $\mathbf{B}^{02}$ (*cf.* [1], p. 67-68). Ces possibilités n'ont pas encore été exploitées; indiquons seulement que la conjugaison, définie par une transformation conservant la structure stabilisée du RA et par le choix d'un relacage, peut être associée à un fonctionnement biquadratique.

1. Dans le cas d'un BCR sous-jacent $X^2 + \varepsilon XY + Y^2$ ($\varepsilon = 0$ ou ± 1), il y a fonctionnement de classe (γ) pour $P = A^2 + \varepsilon AB + B^2$, A et B étant les coefficients de couplage dans le support généralisant (9); la séquence réduite **1** (*cf.* § 2) fournit un résultat indépendant des A, B si $P = L(A^2 + \varepsilon AB + B^2)$ avec L entier. On démontre que $\mathbf{B}^{02}$ est proportionnel à $A^{02} - \varepsilon A^0 B^0 + B^{02}$. En raison du changement de signe dû à l'effet miroir $A^0 B^0 = -AB$. Donc $\mathbf{B}^{02}$ et P sont proportionnels.

4.3. *Niveau de synthèse associé à un RA générique*

Les relateurs arithmétiques ayant pour support (27) sont des BCR inhomogènes où l'environnement a un rôle passif. Il est donc normal qu'ils apportent peu de nouveauté sur les systèmes de poids. La situation est très différente dès que la structure stabilisée d'un RA est exploitée, ce qui implique l'usage de supports tels que (1) ou (7). Jusqu'à présent, un seul cas a été traité complètement : il concerne des RA stabilisés par une seule variable d'environnement, ayant un BCR sous-jacent non connexe. Le support de ces BCR, qui ne comporte que des termes carrés, est donc associé à des sommes directes d'algèbres de Lie A_1, B_1 ou C_1 (ces notations classiques sont rappelées notamment en [38], p. 78 et [39], p. 193). L. Nottale [24] a étudié le comportement linéarisé de ces RA fonctionnant, en classe (0), pour $|DB_i B_r/P| \ll 1$, au voisinage d'un des états $\mathbf{X}^0_{BCR}$ qui seraient engendrés pour $D=0$. En d'autres termes, L. Nottale considère des suites de séquences réduites particulières, appelées quadriséquences, qui sont des cycles pour le BCR sous-jacent. Ce comportement dépend seulement de 3 paramètres entiers λ, ν, β et d'un indicateur de parité a (*cf.* [24], p. 64); il peut être réduit à celui d'un RA à 2 variables principales.

Si les paramètres $x_{\mu 0}$ et v_0 vérifient les conditions $|x_{\mu 0} B_\mu| \ll |v_0|$, les états engendrés au voisinage de $\mathbf{X}^0_{BCR}$ sont positionnés, en première approximation, aux sommets d'un réseau bidimensionnel par l'intermédiaire des paramètres λ et ν qui jouent le rôle de coordonnées (β n'intervient pas; pour a impair, une translation supplémentaire se manifeste). Afin de préciser la configuration, prenons un RA à deux variables principales X, Y et choisissons $x_0 = y_0 = 0$, $v_0 \neq 0$. La formule de Nottale ([24], p. 64) donne pour a pair :

$$\frac{X}{P^K} = -\frac{AD\,v_0}{P}\,\frac{(\lambda+\nu)}{2}; \qquad \frac{Y}{P^K} = -\frac{BD\,v_0}{P}\,\frac{(\lambda-\nu)}{2} \tag{29}$$

Ces expressions correspondent aux composantes d'un poids dans le référentiel des $\mathbf{e}^0_\mu$. En effet, si $v_0 = w_0 P + c$ avec w_0 entier non nul et $|c| \ll P$, les conditions de verrouillage de la classe (0) sont satisfaites et, pour P très grand devant l'unité, $(w_0 P + c)/P$ peut être remplacé par w_0 en première approximation. Comme le groupe de Weyl joue un rôle essentiel dans le fonctionnement du RA, certaines configurations engendrées naturellement devraient constituer un système de poids.

La formule de Nottale n'a pas encore été généralisée. Pourtant, il est raisonnable d'étendre les résultats obtenus précédemment à un RA ayant pour support :

$$\{P(X^2 + \varepsilon XY + Y^2) + D(AX+V)(BY+V)\} = \{-\}_0 \tag{30}$$

avec $\varepsilon = \pm 1$, car son comportement linéarisé fait apparaître celui du BCR sous-jacent au voisinage d'un point $\mathbf{X}^0_{BCR}$ si les conditions (29) sont satisfaites (*cf.* [40], p. 94, *fig.* 9). On devrait donc retrouver des configurations associées à des représentations irréductibles de SU3. Si cette supposition est bien vérifiée, le RA se comporte comme un système générique (*cf.* [6], p. 478). Il se situe alors à un niveau de synthèse plus élevé que celui des systèmes de racines.

4.4. *Modélisation d'un groupe de Lie et de son algèbre au moyen d'un RA*

Dans les investigations précédentes, le BCR sous-jacent d'un RA est interprété comme un système de racines. On peut aussi chercher à situer ce système au niveau du BCR d'environnement. Dans ce cas, le BCR sous-jacent doit être associé à la structure invariante du groupe de Lie. Prenons d'abord le cas des groupes SOn. D'après (7), la stabilisation introduit des termes croisés en $X_\mu X_\nu$ et, pour K infiniment grand, les appels à l'environnement ne sont pas nécessaires. Sous de nombreuses réserves (nombre des variables d'environnement suffisant, structure des différents termes d'environnement judicieusement choisie, application pseudo-aléatoire des réflexions...), l'ensemble des produits pairs de réflexions engendrés par le RA pourrait éventuellement être dense dans le groupe SOn (de délicats problèmes de connexité sont posés).

Et il y a beaucoup d'autres problèmes! De plus, il n'est pas sûr que l'on puisse aborder de cette façon l'algèbre de Lie des groupes SO(p, q) pour $q \neq 0$. Pourtant leur importance est cruciale en physique; voici quelques raisons qui ne sont pas indépendantes :

– Le groupe SO(4, 2) et le groupe conforme sont localement isomorphes [38], p. 345.

– D'après A. O. Barut, SO(4, 2) modélise des changements d'états d'un atome d'hydrogène (*cf.* [38], p. 311),

– Ce groupe intervient dans l'étude des probabilités de transition associées à l'opérateur dipôle électrique [38], p. 325-239, qui paraît impliqué dans de récentes investigations sur la structure de l'eau [42].

Il faudra peut-être utiliser une extension algébrique complexe. C'est une idée donnée par Ph. Riot en [2], p. 506. Elle est aussi mentionnée en [6], p. 479 à propos d'un « champ d'interférences structurelles » lié au milieu aqueux; nous avons proposé de décrire ce champ au moyen d'un RA dont le BCR sous-jacent serait associé à l'algèbre de Lie A_4 (et donc au groupe SU5) et de prendre en compte une extension algébrique dans un corps de nombres algébriques. Comme le groupe SO(4, 2) admet A_3 pour algèbre de Lie simple

complexe (*cf.* [38], p. 173) et qu'il intervient dans l'étude de l'opérateur dipôle électrique, il y a là un début de liaison avec des approches classiques.

Dans le cas des groupes SUn, la structure quaternionique (ou, ce qui revient au même, celle de SU2) doit être prise en compte. Elle est introduite naturellement par les domaines multiplicatifs à 4 variables qui engendrent des imbrications de niveaux.

Si toutes ces possibilités étaient confirmées, un premier RA pourrait décrire le passage « groupe de Lie »-« système de racines » et, un deuxième, le passage « système de racines »-« système générique de poids ». Pour les enchaîner, il suffirait de faire jouer au BCR d'environnement du premier RA le rôle du BCR sous-jacent du deuxième. Ainsi serait démontrée dans un cas particulier le procédure d'intégration rappelée au début du paragraphe 4.

4.5. *Les nombres d'information virtuelle*

Le développement à l'ordre h d'un RA $\mathscr{R}$ (admettant par exemple (7) pour support et (8) pour valeurs initiales canoniques) consiste à limiter l'expression algébrique des $X_\mu(\tau)$ et $V_\alpha(\tau)$ aux termes ayant un degré en $P_1 \ldots P_\alpha \ldots$ supérieur ou égal à $K-h$ (du moins si les K_α sont tous égaux à K); c'est une généralisation de la procédure de linéarisation. Il élimine la structure arithmétique qui déclenche les appels à l'environnement et caractérise l'état d'un RA d'un point de vue géométrique. Les appels à l'environnement de $\mathscr{R}$ doivent être déterminés par un autre RA, appelé « pilote » $\mathscr{P}$, qui a la même classe de fonctionnement que $\mathscr{R}$, possède un nombre de variables minimal et fait intervenir au cours de son fonctionnement des nombres de taille moyenne minimale. Toutes les conditions de verrouillage de $\mathscr{R}$ doivent être connues et les conditions correspondantes être satisfaites par $\mathscr{P}$. Il y a pilotage partiel à l'ordre s si les appels à l'environnement pris en charge par $\mathscr{P}$ proviennent de termes de degré (en $P_1 \ldots P_\alpha$) inférieur à s. Comme ces appels dépendent d'un emboîtement de congruences, l'usage des entiers p-adiques (ou d'une extension convenable de ces nombres) s'impose. Les premières investigations ont été faites par F. Boccara [43]. Ce développement caractérise l'état du RA d'un point de vue arithmétique. La transposition de ce schéma dans le cadre de la biologie conduit à assimiler le rôle du pilote à celui d'une enzyme.

Diverses informations sur le comportement du pilote sont résumées dans le second membre $\{-\}_0$ du RA qui est l'invariant fondamental. Prenons l'exemple d'un RA supporté par (30) :

- La classe de fonctionnement dépend de la parité de l'exposant de P : $\{-\}_0$ est divisible par P^{2K} en classe (0) alors qu'il est divisible par P^{2K+1} en classe (α) [1]. Par ailleurs, si le RA a un support dégénéré, ce qui implique : $P=A^2+\varepsilon AB+B^2$ et $D=D_c=4-\varepsilon^2$, pour P premier, le fonctionnement est non cyclique de classe (γ) si l'exposant de P dans $\{-\}_0$ est pair et il est cyclique dans le cas contraire [43].

- Dans l'hypothèse où (30) a une structure biquadratique généralisée, la factorisation de $P=L(A^2+\varepsilon AB+B^2)$, avec $L>1$, donne des indications sur l'ensemble des valeurs potentielles de L, A, B. Elle est aisément exploitable parce que les formes quadratiques à 2 variables constituent un domaine multiplicatif (associé à la structure des nombres complexes). La même propriété existe dans le cas des BCR sous-jacents à 4 et 8 variables (structure des quaternions et des octaves de Graves-Cayley respectivement). Quand les formes à 2 variables sont elliptiques, les nombres premiers représentables par ces formes codent des configurations angulaires. Pour cette raison, certains exposants peuvent être associés à des nombres quantiques repérant des orbitales [44]...

- Le facteur $P(x_0^2+\varepsilon x_0 y_0+y_0^2)+D(A x_0+v_0)(B y_0+v_0)$ de $\{-\}_0$ résume un ensemble d'états initiaux potentiels.

- Le paramètre F de (10) apparaît au carré dans $\{-\}_0$; la factorisation de P donne donc des « informations » sur le recalage adopté...

Ces « informations » ne sont pas objectives au sens habituel du terme parce qu'elles dépendent du cadre dans lequel est exploitée la factorisation et sont affectées de diverses ambiguïtés. Pour ces raisons, les seconds membres ou certains de leurs facteurs ont été appelés « Nombres d'Information Virtuelle » [45]. Une liaison avec l'information de Shannon est envisageable dans certains cas particuliers. Une autre liaison pourrait concerner, dans d'autres cas, le potentiel d'organisation fonctionnelle de G. Chauvet [79], p. 413-415.

5. Niveaux d'organisation

5.1 *Détermination des niveaux d'organisation*

Les différents niveaux de structuration, de fonctionnement et de synthèse sont appréhendés de façon cohérente car ils sont modélisés par un outil qui

1. La classe (α) est définie par un ensemble de conditions de verrouillage données en [1]; en particulier, il faut que les coefficients introduits dans les valeurs initiales canoniques vérifient $(A x_0+v_0)=0$ (mod P), $(B y_0+v_0)\neq 0$ (mod P) ou bien $(A x_0+v_0)\neq 0$ (mod P), $(B y_0+v_0)=0$ (mod P). Au contraire, en classe (0), d'après les conditions (3) $(A x_0+v_0)$ et $(B y_0+v_0)$ ne sont congrus à 0 (mod P), ni l'un, ni l'autre. La différence de parité de l'exposant de P dans le second membre en résulte.

exprime structurellement l'adaptation d'un système à son environnement et reflète des structures appartenant simultanément aux systèmes observateurs-acteurs et aux systèmes observés. Cette cohérence se manifeste par différents bouclages.

Bouclages cybernétiques

Dans certains cas limites, le fonctionnement séquentiel d'un RA fortement dégénéré peut modéliser un système différentiel (*cf.* [47], p. 20-21) et, par conséquent, décrire des bouclages cybernétiques classiques. Il est probable que d'autres modélisations de tels bouclages seront trouvées. Mais, en général, le paramètre τ qui repère une suite de réflexions n'est pas identifiable au temps de la physique macroscopique; il repère « successivement » des « états » qui peuvent ne pas être voisins dans l'espace et le temps habituels. Les bouclages, induits par le couplage « système-environnement », ne sont donc pas réductibles à ceux qui interviennent en systémique classique; ils peuvent s'apparenter à ceux que fournissent les modèles quantiques.

Compatibilité des rythmes internes

La cohérence des niveaux de structuration, de fonctionnement et de synthèse se manifeste dans le référentiel spatiotemporel classique à des niveaux privilégiés, appelés niveaux d'organisation. Ils sont d'abord caractérisés par une compatibilité de divers rythmes internes associés à des structures d'imbrication. On en déduit la constante fondamentale N_0 :

$$N_0 = (2^{65} \times 3^{41} \times 5^{28})^{1/3} = 3{,}687\,175 \,.\, 10^{19}$$

qui caractérise les changements de taille des niveaux d'organisation majeurs [48], p. 256-259. Elle vaut approximativement la racine quatrième du « Nombre cosmique » d'Eddington : $N = (3/2) \times 136 \times 2^{256}$ (*cf.* [49], p. 265); $N_0 = 0{,}528\,891\, N^{1/4}$.

Optimisation de phases angulaires

A ces niveaux d'organisation, les cellules spatiotemporelles ($\mathscr{C}$) sont représentées par des « éléments structurés de déplacement » (ESD). Leur taille et leur développement doivent respecter des contraintes de voisinage spatiotemporel (au sens habituel) qui sont fixées par les niveaux d'organisation supérieurs. Nous supposons que ces cellules possèdent aussi une propriété complémentaire : elles contiennent approximativement une partie (Γ) des « états » engendrés séquentiellement au cours de pseudocycles stationnaires. L'extrémalité des ESD se traduit par une optimisation de phases angulaires [48], p. 261-263. Dans le cas d'un BCR sous-jacent associé à l'algèbre de Lie de SU3, on

en déduit une valeur approchée du rapport m_H/m_e (m_H masse d'un atome d'hydrogène et m_e masse de l'électron) et de la constante de structure fine α [1]. La compatibilité de ($\mathscr{C}$) et de (Γ) est l'analogue spatiotemporel de la compatibilité des rythmes internes.

Champ d'interférences structurelles

D'après l'hypothèse précédente, la partie (Γ) (des « états » engendrés au cours d'un pseudocycle) est restructurable en termes de voisinages spatiotemporels; dans le cadre du formalisme utilisé, cela implique qu'une partie du RA fonctionne avec des valeurs des P_α grandes devant celle des $|D_\alpha B_{\alpha i} B_{\alpha r}|$. Or la valeur moyenne des variables entières, qui varie exponentiellement avec les exposants K_α, doit rester compatible avec le nombre d'unités existant dans une cellule car les nombres fractionnaires représentent des entités du niveau d'organisation inférieur ne pouvant pas être prises en compte dans le cadre du modèle. Il faut donc que la cellule contienne un pilote caractérisé par les P'_α les plus faibles. En majorité, les « états » engendrés directement par ce pilote ne respectent pas les contraintes de voisinage spatiotemporels habituels. Aux voisinages repérés par des nombres réels, se superposent donc des « voisinages » qui prennent sens dans d'autres référentiels et mettent en œuvre des nombres p-adiques, dans le cas le plus simple.

A un niveau d'organisation donné, un système engendre donc une structure informationnelle implicite dispersée dans l'espace, dans le temps et à différents niveaux (notamment dans le milieu aqueux cellulaire des organismes pluricellulaires *cf.* [6], p. 479 et [44]), qui est associée à un « champ d'interférences structurelles ». Elle est en résonnance avec une structure informationnelle explicite située à l'intérieur de chaque sous-système (par exemple, la double hélice d'ADN dans une cellule vivante). Cette structure informationnelle implicite ne peut être perçue que par un récepteur la contenant potentiellement. Elle n'est pas prise en compte dans la théorie classique de la communication, mais elle est en germe dans les théories quantiques. Ces suggestions rejoignent les préoccupations de certains physiciens : la violation du principe de séparabilité chez B. d'Espagnat [50], p. 99-117, l'existence d'un « implicate order » chez D. Bohm [51], l'existence d'ondes avancées chez O. Costa de Beauregard [52], le caractère non algorithmique de la conscience chez R. Penrose [53].

1. Voici les premières approximations trouvées : $m_H/m_e \sim 6\sqrt{6} \times 5^3 = 1837.12$ (au lieu de 1837.11) et $(1/\alpha)^2 = 6 \times 5^5 = (136.93)^2$ (au lieu de $137.04)^2$. >

5.2. *Liaison avec d'autres approches*

Ces points de vue sur les niveaux d'organisation complètent ceux des spécialistes de la hiérarchisation. Par exemple, M. D. Mesarovic *et al.* [54], p. 35-67 ont introduit trois notions de niveaux : de description (ou d'abstraction), de complexité de la décision, d'organisation, qui font intervenir respectivement les concepts de strates, de couches et d'échelons. Cette théorie repose sur les relations entre niveaux et plus particulièrement sur le concept de coordination qui contient un aspect « auto-organisation » (changement de structure) et un aspect « commande » (maintien d'une structure). Il y a auto-organisation dans l'approche que nous proposons, mais elle n'est que partielle puisqu'elle doit refléter une organisation existant potentiellement dans un « champ d'interférences structurelles ». La commande intervient également, mais en reflétant partiellement une structure de commande existant potentiellement. Rappelons aussi l'approche développée par P. Auger [30] qui est fondée sur la théorie des compartiments [29] et prend en compte des imbrications d'échelles d'espace, de temps et d'énergie dans un cadre thermodynamique. Une liaison avec ces travaux est envisagée *via* les nombres d'information virtuelle.

Un RA est un moyen d'expliciter en un temps fini des solutions de certaines équations diophantiennes (de degré pouvant être élevé) [1] dans la mesure où au moins une des solutions est connue. Admettons que l'état des variables X_μ et le second membre de (7) sont donnés mais que les paramètres D_α, P_α, $B_{\alpha\mu}$ sont inconnus. Un ensemble de ces données incomplètes constitue une structure informationnelle implicite. Y. Matiyasevic a prouvé (*cf.* M. Davis [55], p. 199-235) qu'il n'existe pas d'algorithme indiquant, dans un cas général, si une équation polynomiale diophantienne à coefficients entiers possède ou non une solution entière. Le problème posé n'est donc pas de nature purement algorithmique; par contre, dès qu'un ensemble convenable de paramètres est découvert, le RA peut fonctionner et il y a brutalement détermination d'un grand nombre d'états, c'est-à-dire explicitation et réalisation de ce qui était implicitement en germe. Ce problème est donc lié à celui de la reconstructibilité d'un système traité par G. Klir [56]. Il ouvre aussi un autre champ d'investigation : si l'on admet que la structure informationnelle implicite est d'origine quantique, une explication partielle de cette struture réalise une liaison avec d'autres niveaux d'organisation; peut-être est-ce un moyen d'appréhender un aspect du processus de « prise de conscience »

1. Sous l'effet des congruences exceptionnelles (qui sont des conditions de verrouillage transgressées), un R.A. peu devenir multiquadratique, certains paramètres devenant des variables.

puisque, d'après R. Penrose [53], la conscience serait à caractère non algorithmique et liée à des phénomènes quantiques.

5.3. *Bouclage structurel*

La cohérence des niveaux de structuration, de fonctionnement et de synthèse implique un bouclage structurel global. Voici une analogie permettant de saisir le problème posé. La répartition spatiale des atomes ou des molécules dans un cristal réalise, de façon tout à fait concrète, une structure cristallographique. Et dans un système de chauffage, que l'énergie soit d'origine fossile, nucléaire ou solaire, il existe un très grand nombre de cristaux différents. Par ailleurs, la modélisation d'une commande optimale de chauffage peut être appréhendée au moyen d'un groupe de Lie qui est caractérisé par le système de racines de l'algèbre de Lie associée [9], [10]. Ce système a aussi une structure cristallographique. On peut donc imaginer que cette structure abstraite est identique à celle (ou à une partie de celle) présente dans un des cristaux de l'installation. Ce qui est une coïncidence pour un système artificiel pourrait être au contraire l'expression d'un bouclage structurel primordial pour un système vivant.

Puisque le RA est un moyen d'appréhender globalement des aspects structurel, dynamique et concret, nous proposons d'exprimer la cohérence globale d'un système vivant Σ adapté à son environnement par diverses identifications de RA (ou de parties de RA) situées à des niveaux d'organisation différents, l'un décrivant de façon synthétique Σ (ou un sous-système S de Σ), l'autre étant une partie d'un RA modélisant des sous-systèmes de Σ (ou de S) et l'ensemble de ces bouclages étant décrit lui-même par un RA appartenant à Σ. Cette structure, qui reflète celle des automates autoreproducteurs de J. von Neumann [57], réalise une synthèse entre des aspects physique et logique. Elle n'est pas descriptible dans un référentiel spatiotemporel classique puisque les bouclages font intervenir des RA modélisant des systèmes génériques. De façon pratique, on peut emboîter plusieurs RA d'après la méthode indiquée aux paragraphes 4.3, 4.4 et boucler l'un des BCR d'environnement d'un niveau supérieur dans un des BCR sous-jacents d'un niveau inférieur. De telles idées ne sont pas absentes des réflexions actuelles des physiciens. Par exemple, la théorie dite du « bootstrap topologique », qui est un prolongement des travaux de G. Chew, est une tentative correspondant à des préoccupations voisines (*cf.* les interrogations de B. Nicolescu [58] sur la nature du « réel »).

Ces bouclages impliquent l'existence de champs d'interférences structurelles (se développant notamment dans les milieux aqueux) et de sous-systèmes de perception, de transmission, de commande, ... qui sont en résonance avec ce

champ et explicitent certaines de ses potentialités. Le fonctionnement de ces sous-systèmes est modélisé par des RA dégénérés puisqu'il y a propagation d'un signal ou d'une substance. Ces descriptions et ces communications entre sous-systèmes font intervenir un langage associé aux ESD. Dans une cellule vivante, la description est portée par les brins d'ADN; une partie des communications s'effectue par l'intermédiaire de molécules chimiques, par exemple des médiateurs chimiques, des hormones, des neurotransmetteurs (*cf.* [59], chap. XIII).

6. Esquisse d'un langage associé aux ESD

Oser esquisser un nouveau langage est bien téméraire quand on ne possède pas une solide formation en informatique théorique ou en linguistique. Pourtant, cette entreprise (*cf.* communication de F. Chauvet [7]) était nécessaire car il fallait élargir les points de vue classiques. En effet, d'après le principe « d'invariance approchée de certaines descriptions sous l'effet de changements de niveau » (*cf.* [6], p. 472-476), une lettre, un mot, une phrase... de ce langage doit avoir une signification à différents niveaux de description ou d'organisation et comporter de façon irréductible ambiguïtés et imprécisions. Quand ce langage sera bien développé, il présentera donc certaines caractéristiques d'un langage naturel. Mais, puisqu'il s'appuye sur des résultats [2] de géométrie algébrique, de topologie, d'arithmétique, de logique..., appliqué à un niveau bien précis et dans des conditions bien particulières, il s'apparentera aussi à un langage formel.

Un langage est souvent considéré comme un moyen de communication entre organismes vivants et/ou systèmes artificiels. Ce n'est pas le point de vue adopté : nous cherchons d'abord à modéliser, au moyen des RA les plus simples, différents types de formes et de comportements de systèmes vivants situés à différents niveaux d'organisation; ensuite, les caractéristiques de ces modèles sont résumées au moyen d'autres RA. De cette façon émergent progressivement des éléments d'un langage de description; il devrait être aussi un langage de communication puisque les RA reflètent, à notre avis, certaines structures mentales primordiales.

6.1. *Structures de base : BCR et PBR*

Les structures de base sont les BCR, associés aux systèmes de racines des algèbres de Lie semi-simples et aux singularités [1] (notamment aux catastrophes élémentaires), et de PBR (*cf.* paragraphe 3.2) liés aux algèbres de Kac-Moody [60]. En plus de la dimension 1, interviennent de façon privilégiée les dimensions 2, 4 et 8 car les domaines multiplicatifs quadratiques qui leur sont associés permettent d'exploiter au mieux la factorisation d'un second membre.

1. La liaison entre les systèmes de racines des algèbres de Lie simples et certaines singularités des fonctions différentiables a été établi par E. Brieskorn (*cf.* V. Arnold *et al.* [80], P. Slodowy [81]).

Notre point de départ n'est pas le BCR à une variable, mais l'ensemble des 4 BCR à 2 variables et des 2 PBR à deux variables [1]. Ce choix des BCR n'est pas sans lien avec l'existence d'un alphabet à 4 bases dans un brin d'ADN. De plus, il est cohérent avec les hypothèses adoptées pour la construction des relateurs arithmétiques [12] : équilibre de « trois aspects interdépendants » (qui sont entre eux comme « le concret », « le dynamique », « l'informationnel ») dans une dynamique « ouverture-fermeture ». Une trialité associée à une double dualité se retrouve, en effet, dans l'ordre des groupes cycliques : 4, 6, 8 et 12, engendrés par ces BCR.

Il y a en tout 36 BCR à 4 variables, 20 d'entre eux étant connexes et associés aux familles A_4, B_4, C_4, D_4 et F_4 d'algèbres de Lie simples. Les 3 BCR associés à A_4 (*cf.* [6], p. 467) ont été appelés Eau I, Eau II et Eau III car ils sont utilisés pour la modélisation d'un milieu aqueux. La catastrophe élémentaire qui leur correspond est la « queue d'aronde » [80], p. 154, [82], p. 121.

Cette approche diffère beaucoup de la théorie des machines de Turing et des fonctions calculables [61], [55] (où interviennent trois opérations fondamentales, la substitution, la récursion primitive, l'opération « le plus petit nombre » et deux fonctions particulières, *cf.* notamment [62] p. 131-136), car un certain nombre d'ambiguïtés fondamentales ne sont pas levées *ab initio*. Pour bien saisir la démarche qui guide le développement des RA et détermine leurs applications, il faut oublier un peu les concepts classiques, découvrir progressivement des structures fécondes et privilégier celles qui peuvent être décrites aisément au moyen de celles déjà trouvées. Tout cela paraît rejoindre certaines préoccupations de X. Sallantin, exprimées il y a plus de vingt ans, publiées notamment en [63], chap. VIII, et reformulées récemment en [64].

6.2. *Classes de fonctionnement des R.A. quadratiques*

Les classes de fonctionnement sont caractérisées par le BCR sous-jacent et le BCR d'environnement, la partition des variables principales dans les termes de couplage et les congruences exceptionnelles qui sont, rappelons-le, des

1. Le support homogène du premier s'écrit : $(X-X')^2$; et celui du second : $(X-2X')^2$.

conditions de verrouillage transgressées. F. Chauvet [16] a étudié le cas des RA à une variable d'environnement dont le BCR sous-jacent est issu d'un graphe de Dynkin donné : en classe (0), les conditions de verrouillage quadratiques appartiennent à un ensemble de conditions fixées par le groupe de Weyl du système de racines. Choisissons les 3 BCR « Eau » précédemment cités. Chacun d'eux fournit plusieurs types de RA stabilisés à une variable d'environnement puisqu'il faut prendre en compte la partition (3+1) ou (2+2) des 4 variables principales dans les termes de couplage ainsi que leur dissymétrie éventuelle. Il y a en tout 12 types de support; 5 correspondent au BCR « Eau I » (qui possède seulement 3 termes croisés). Voici, l'un d'eux dans le cas d'une partition (3+1); les ε_{ij} valent ± 1 :

$$\{P(X^2+\varepsilon_{12}XY+Y^2+\varepsilon_{23}YZ+Z^2+\varepsilon_{34}ZR+R^2) + D(aX+bY+cZ+V)(fR+V)\}=\{-\}_0 \quad (32)$$

Le cycle engendré par le BCR sous-jacent a pour longueur 20 et contient 10 produits $(\prod \mathscr{H}_i)$, $(\prod \mathscr{H}_r)$. Il y a donc 9 appels à l'environnement dans une cellule élémentaire et par conséquent 9 conditions de verrouillage quadratiques :

Conditions de verrouillage quadratiques en classe (0)*:*

(I) $a^2+b^2+c^2-\varepsilon_{12}ab-\varepsilon_{23}bc+\varepsilon_{12}\varepsilon_{23}ac$

(II) $a^2+b^2+c^2+f^2-\varepsilon_{12}ab-\varepsilon_{23}bc+\varepsilon_{12}\varepsilon_{23}ac+\varepsilon_{12}\varepsilon_{23}\varepsilon_{34}af-\varepsilon_{23}\varepsilon_{34}bf+\varepsilon_{34}cf$

(III) $a^2+2b^2+2c^2+f^2-2\varepsilon_{12}ab-3\varepsilon_{23}bc+\varepsilon_{12}\varepsilon_{23}ac+\varepsilon_{12}\varepsilon_{23}\varepsilon_{34}af-\varepsilon_{23}\varepsilon_{34}bf+2\varepsilon_{34}cf$

(IV) $a^2+2b^2+2c^2+f^2-2\varepsilon_{12}ab-3\varepsilon_{23}bc+\varepsilon_{12}\varepsilon_{23}ac-\varepsilon_{23}\varepsilon_{34}bf+2\varepsilon_{34}cf$

(V) $a^2+2b^2+2c^2+f^2-2\varepsilon_{12}ab-3\varepsilon_{23}bc+\varepsilon_{12}\varepsilon_{23}ac-2\varepsilon_{23}\varepsilon_{34}bf+2\varepsilon_{34}cf$

(VI) $a^2+2b^2+2c^2+f^2-2\varepsilon_{12}ab-3\varepsilon_{23}bc+\varepsilon_{12}\varepsilon_{23}ac-\varepsilon_{23}\varepsilon_{34}bf+2\varepsilon_{34}cf$

(VII) $a^2+b^2+c^2+f^2-\varepsilon_{12}ab-\varepsilon_{23}bc+\varepsilon_{12}\varepsilon_{23}ac+\varepsilon_{12}\varepsilon_{23}\varepsilon_{34}af-\varepsilon_{23}\varepsilon_{34}bf+2\varepsilon_{34}cf$

(VIII) $a^2+b^2+c^2+f^2-\varepsilon_{12}ab-\varepsilon_{23}bc+\varepsilon_{12}\varepsilon_{23}ac+\varepsilon_{12}\varepsilon_{23}\varepsilon_{34}af-\varepsilon_{23}\varepsilon_{34}bf+\varepsilon_{34}cf$

(IX) f^2

Si P est égal à l'une des expressions (I), (II), (VII), (VIII) précédentes, (32) est le support d'un RA biquadratique dont le fonctionnement est caractérisé par des conditions de verrouillage éventuellement différentes. Les formes (II) et (VIII) sont des supports du BCR « Eau III » (ayant 6 termes croisés). Par conséquent, à partir du BCR sous-jacent et de la séquence réduite repérant une condition de verrouillage, on peut :

– coder certaines formes quadratiques en les considérant comme des conditions de verrouillage,

– repérer certains types de RA biquadratiques,

– changer de BCR sous-jacent.

Cet exemple montre comment peut se développer un langage caractérisant les RA non étirés à partir de BCR; pour les R.A. étirés, il faut faire intervenir les PBR.

6.3. *Langage formel*

A chaque classe de fonctionnement ayant une structure d'imbrication, est couplé un (ou plusieurs) arbre(s) de séquences réduites. Par exemple, en classe (γ), (*cf.* J.-P. Luminet [65], p. 123), il y a deux arbres distincts qui dépendent de la parité de l'exposant K (intervenant dans les valeurs initiales canoniques) : l'un est isomorphe à un arbre de classe (0); l'autre, à un arbre de classe (α). Les séquences réduites s'expriment au moyen d'un alphabet (*cf.* § 2.2) et constituent l'ensemble des mots d'un langage formel. Des règles de production, qui se déduisent de la structure d'imbrication, peuvent résumer la construction de ces arbres.

A priori, l'aphabet est spécifique du langage formel considéré. Mais comme des séquences réduites sont représentables par des nombres ayant une signification numérique (en classe (0) et au cours du premier demi-cycle, c'est le nombre d'appels à l'environnement effectués par le RA depuis le point initial canonique), il est possible de représenter ce nombre dans une autre base, notamment celle repérant les BCR. Le mot décrivant un RA peut donc être interprété comme une séquence particulière (c'est une habitude en informatique, puisque le même système de numération – qui est binaire – sert à localiser une mémoire ou à indiquer le nombre qu'elle contient). Un premier mot repère un RA, un deuxième des séquences privilégiée, un troisième des valeurs numériques... L'étirement d'un RA donne une capacité de déplacement ou de changement; là encore il peut être caractérisé par des lettres associées au PBR... Progressivement, nous constatons que les éléments rigoureux d'un langage formel sont transposables avec ambiguïté et flou en un langage pouvant avoir une multiplicité de significations à différents niveaux. Pour expliciter ces possibilités, deux points de vue complémentaires doivent être distingués, l'un est « arithmétique », l'autre « géométrique ».

Articulations rigoureuses des mots

La structure des appels à l'environnement relève d'un point de vue « arithmétique ». Elle est caractérisée par le « plus petit pilote » de la classe. Dans le cas le plus simple, à partir d'un mot $\$_0$ repérant un point de

coïncidence, d'une valeur de K et d'un recalage particulier (*cf.* § 2.3) est engendrée une séquence qui représente un autre mot. Un ESD peut être déterminé par cette séquence (au lieu d'être engendré automatiquement par l'ensemble d'un pseudocycle comme en [31] et [32]). Dans le nouvel état, doit être choisie une nouvelle séquence $\$'_0$ (ou éventuellement plusieurs) fixant de nouvelles conditions initiales. Il existe au moins une solution puisque les points canoniques des R.A. direct et conjugué peuvent être mis en coïncidence. Le choix peut être imposé par des contraintes rigoureuses ou provenir d'une compatibilité de voisinages fixée par un aspect « géométrique ».

Choix fondés sur le développement d'un RA à l'ordre h

L'aspect « géométrique » est fourni par le développement des états d'un RA générique au voisinage d'une singularité, les séquences réduites représentant un cycle pour le BCR sous-jacent. Dans un cas assez général (celui des R.A. de classe (0) par exemple), le nombre de mots engendrés au cours d'un cycle croît exponentiellement avec K alors que celui des amas d'ordre 1 augmente seulement de façon polynomiale (dans le cas étudié par L. Nottale [24], la longueur d'un cycle varie comme 3^K et le nombre de ces amas comme K^3). Tous les mots appartenant au même amas sont des synonymes à l'ordre 1 (cette notion est généralisable à l'ordre h). Il est donc possible de choisir les « nouvelles conditions initiales » par des conditions de voisinage. A la limite, on pourrait négliger l'aspect « arithmétique », ou du moins le résumer par quelques règles simples, et privilégier la compatibilité des voisinages. De cette façon, pourrait être établie une jonction avec la théorie du flou (c'est une préoccupation du groupe Systema depuis une dizaine d'années [66]). L. Zadeh [67] a insisté récemment sur les développements de cette théorie en logique et en linguistique; G. J. Klir [68] a énoncé un principe d'invariance de l'incertitude (qui recoupe un principe de conservation de l'information); et la remarquable efficacité des algorithmes a pu être vérifiée en robotique par T. Yamakawa [69].

Conclusion

Parce que le relateur arithmétique est un moyen d'exprimer fondamentalement l'adaptation d'un système à son environnement, différentes notions de niveaux de description et d'organisation peuvent être appréhendées globalement. Le référentiel spatio-temporel classique des physiciens n'est pas adopté *ab initio*. On utilise, comme point d'appui, des structures ayant un caractère de grande généralité : ce sont les systèmes de racines des algèbres de Lie qui sont étroitement couplés à la théorie des singularités et à celle des catastrophes. Le formalisme introduit des éléments structurés de déplacement

(ESD) qui contiennent un aspect linguistique. Un ESD est mis en correspondance avec un « Iterated Function System » (IFS) de M. Barnsley et peut donc être considéré comme un attracteur fractal. Les séquences réduites de Nottale ont un rôle voisin de celui que jouent les « adresses » dans les IFS. L'étude simultanée de deux RA direct et conjugué engendre des langages formels qui sont associés aux ESD.

Le langage qui est esquissé est aussi apparenté aux langages naturels en raison des ambiguïtés et du flou qui peuvent l'accompagner. Un nom (d'un système naturel observable visuellement) est le codage d'un RA qui engendre de façon simple une forme typique. Il n'y a pas unicité des appellations puisque la forme dépend souvent des conditions d'observation; et un mot peut avoir un grand nombre de significations puisqu'un RA est applicable à différents niveaux d'organisation. Des RA décrivant des cristaux, des écoulements hydrodynamiques, des organes de végétaux et d'animaux, des cellules vivantes... ont déjà été repérés. Un verbe (s'il représente une action, un mouvement, une transformation, ...) peut être le codage d'un RA étiré...

A priori, les applications d'un tel langage sont nombreuses, notamment dans le domaine de l'informatique. Une jonction avec les modèles connexionnistes a d'ailleurs été esquissée [28] : on essaye de décrire successivement des cellules cérébrales (neurones et cellules gliales), leur association en un système cérébral, puis le fonctionnement de ce système qui implique l'imbrication de différents niveaux de synthèse. Une des nouveautés provient du rôle des cellules gliales qui est oublié dans les modèles connexionnistes. Ces cellules pourraient être sensibles à un « champ d'interférences structurelles » se développant notamment dans les milieux aqueux cellulaire et extracellulaire.

Ces perspectives imposent de nombreuses vérifications en physique, biologie, informatique, logique... En particulier, le formalisme devra fournir le calcul précis des diverses configurations de l'ADN, le détail de la machinerie robosomique et bien entendu la correspondance entre triplets d'ADN et acides aminés puisque le langage associé aux RA doit refléter celui qui est mis en œuvre au sein des cellules vivantes. Il ne faut pas sous-estimer les difficultés car, d'après les hypothèses faites, les résultats obtenus au niveau moléculaire doivent être interprétables à d'autres niveaux et être en relation avec une modélisation appropriée du milieu aqueux cellulaire. Établir une jonction avec la théorie relativiste de la gravitation est un autre objectif, qui semble corrélé au précédent. L'expression du tenseur impulsion-énergie électromagnétique dans le vide a déjà été obtenu par voie arithmétique [5]. Il faudra obtenir le tenseur de courbure contracté dans le cadre du formalisme, *i.e.* articuler les voisinages au moyen de mots, de phrases..., utiliser des développements convenables et effectuer de délicats passages à la limite.

L'expression des règles [1] associées aux séquents de Gentzen [70] jouera peut-être un rôle dans cette jonction.

Le problème de la causalité est « l'un des grands thèmes de la philosophie et de l'histoire des sciences », rappelle B. Paulré [72]. Il peut être abordé de façon non classique au moyen des RA, en raison des imbrications de cycles. Par exemple, certaines séquences réduites compliquées deviennent interprétables simplement si l'on admet que la flèche du « temps interne » peut être localement inversée. Cette situation est exploitée au maximum dans le concept de « système générique ». Finalement, en intégrant intimement des aspects géométrique et arithmétique grâce à la condition d'adaptation à l'environnement, le RA réalise cohérence et synthèse entre plusieurs modes de description. A notre avis, l'absence de la dimension « imbrication de niveaux » a bloqué les discussions sur la causalité dans une situation de tout ou rien. L'emploi automatique des nombres réels et des métriques de type réel (et de leurs extensions) fait oublier d'autres moyens de description, par exemple les nombres et la métrique p-adiques qui s'imposeront dans l'avenir. C'est peut-être une des raisons pour lesquelles certains modèles globaux, notamment ceux de la macroéconomie, paraissent souvent critiquables (*cf.* [72], p. 388-390).

Ces remarques soulignent l'importance de tout ce qui est attaché à l'usage d'un formalisme, quel qu'il soit ! Il y a des scientifiques qui restent prisonniers de modèles inadaptés à leurs recherches; d'autres, au contraire, essayent de percer la coquille où ils sont enfermés. En particulier, des mathématiciens, des physiciens, ... comprennent que le vivant ne peut être décrit par les formalismes trop bien adaptés à l'inanimé; C. P. Bruter [73] le rappelle avec poésie : « ...la Nature est une floraison épanouie de formes penchées les unes sur les autres, leur langage subtil est celui des couleurs nuancées qui les habillent... »

Remerciements

Les résultats présentés sont issus de réflexions développées dans le cadre du groupe Systema et du Collège de Systémique de l'AFCET. L'auteur exprime sa reconnaissance à tous ceux qui ont contribué directement ou indirectement à l'élaboration de cet article et particulièrement à F. Chauvet et à Ph. Riot. Il remercie vivement le Professeur C. P. Bruter et le Professeur R. Vallée qui ont bien voulu lire le projet d'article et ont suggéré d'utiles modifications.

1. P. Lorenzen [71] a établi les 12 séquents de Gentzen à partir de (10+4) règles fondées sur un dialogue entre un proposant et un opposant. La recherche d'une jonction entre théorie gravitationnelle et séquents de Gentzen est indiquée en filigrane dans la première publication du groupe Systema [12], p. 95-96.

ANNEXE

A1. Très bref rappel sur les relateurs arithmétiques

Le relateur arithmétique est développé depuis 1971 [12] en vue d'applications aux systèmes naturels (physiques et biologiques notamment) et en informatique. La clef de voûte du formalisme est la relation d'adaptation à l'environnement, découverte par Cl. Vallet en 1975 [83] et interprétée géométriquement par M. Ferré en 1981 [25]. Les fondements mathématiques, établis par Ph. Riot [2], reposent essentiellement sur les structures de Lie. Les relateurs arithmétiques sont apparentés aux modèles connexionnistes [28].

Ce formalisme introduit de nouveaux concepts, notamment *l'invariance approchée* de certaines descriptions d'un système naturel sous l'effet de changements de niveaux, « *l'élément structuré de déplacement* » (ESD) qui remplace l'élément différentiel et contient un aspect linguistique, le « *système générique* » qui décrit séquentiellement une population de systèmes évoluant en parallèle. Penser en termes d'ESD revient à remplacer mentalement les petits parallélépipèdes du formalisme intégro-différentiel par des cellules vivantes ! Alors que le formalisme classique s'applique aisément à de nombreux types de systèmes comportant un très faible nombre de niveaux d'organisation, les relateurs arithmétiques les plus simples modélisent des systèmes présentant un très grand nombre de niveaux d'imbrication, mais le nombre de systèmes pouvant être décrits simplement est relativement limité.

Définition d'un relateur arithmétique quadratique

Il est « défini » par trois données indissociables :

- Une expression quadratique à N variables Z_i dont tous les coefficients sont des entiers, ceux des termes carrés étant non nuls.
- Un état initial qui fixe le second membre de l'expression quadratique, c'est-à-dire détermine la relation, ou un ensemble d'états initiaux et de coefficients fournissant le même second membre. L'expression quadratique et le second membre constituent le *support du relateur arithmétique*.
- Un ensemble de N transformation $\mathscr{H}_i$, appelées « réflexions ». A partir d'un état $(Z_1, \ldots, Z_N)$ satisfaisant la relation support, $\mathscr{H}_i$ garde inchangés

tous les Z_j pour $j \neq i$ et transforme Z_i en la seconde racine Z_i^* de l'équation de second degré en Z_i déduite de la relation support. Une transformation $\mathscr{H}_i$ peut être appliquée seulement si le résultat Z_i^* est un entier; dans le cas contraire, on dit qu'il y a *blocage* du relateur arithmétique

Cette « définition » est incomplète afin que le formalisme soit structurellement ouvert.

Réseau de fonctionnement associé à un relateur arithmétique

Si la forme quadratique en Z_i contenue dans le support est définie positive, elle peut être considérée comme une métrique déterminant les produits scalaires des N vecteurs de base $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_N$. Ces vecteurs définissent le *réseau de fonctionnement*. Si, de plus, le support est homogène (c'est-à-dire s'il ne comporte pas de terme du premier degré en Z_i), une opération de seconde racine est une symétrie par rapport à l'hyperplan normal à $\mathbf{e}_i$ et passant par l'origine. Nous disons que c'est *une réflexion le long de* $\mathbf{e}_i$; cette expression est utilisable dans le cas d'un support inhomogène.

Relateur cyclique de base (BCR)

Les relateurs arithmétiques quadratiques qui engendrent un nombre fini d'états et ne présentent aucun blocage quelles que soient les valeurs initiales et quel que soit l'ordre des réflexions $\mathscr{H}_i$ appliquées sont des BCR. Chaque famille de BCR est caractérisée par une forme quadratique dont le PGCD des coefficients vaut 1 et dont l'un au moins des termes carrés est positif. Les BCR modélisent des structures idéalisées.

Graphe de Coxeter

Une forme caractérisant une famille de BCR à N variables peut être représentée par un graphe de Coxeter : à chaque sommet correspond un des termes carrés Z_i^2; une arête relie le sommet i au sommet j si et seulement si il existe un terme croisé $Z_i Z_j$ affecté d'un coefficient non nul. Classiquement, est spécifié sur chaque arête l'ordre du groupe engendré par le produit $(\mathscr{H}_i \mathscr{H}_j)$ supposé insécable. Pour les BCR ayant un graphe de Coxeter connexe, le coefficient d'un terme carré vaut 1, 2 ou 3. A chacune de ces valeurs correspond respectivement un cercle blanc, un cercle noir ou une étoile; une arête tracée en pointillé indique qu'une contrainte affecte le signe du terme croisé. Dans ces conditions, il est inutile de préciser l'ordre du groupe relatif à l'arête considérée.

Relateur arithmétique quadratique stabilisé (RA)

C'est un relateur arithmétique quadratique dans lequel les variables Z_i sont séparées en deux sous-ensembles, les variables d'environnement V_α et les variables principales X_μ, et qui a les propriétés suivantes :

- La partie du support où interviennent les V_α caractérise un BCR inhomogène, appelé BCR d'environnement; les réflexions $\mathscr{H}_\alpha$ peuvent donc être effectuées quelles que soient les valeurs des X_μ.
- La partie du support où interviennent les X_μ ne caractérise pas un BCR. Les réflexions $\mathscr{H}_\mu$ sont imposées successivement, au moyen d'une séquence S répétée sans modification, et sont effectuées en priorité. Après un certain nombre d'étapes de fonctionnement, il y a nécessairement blocage du relateur arithmétique. S'il est toujours possible d'intercaler juste avant le blocage un produit de réflexions $\mathscr{H}_\alpha$, nommé *appel à l'environnement*, qui permette de relancer le fonctionnement, on dit que ce relateur est stabilisé. Cette situation se présente si les coefficients du support vérifient certaines congruences, appelées *conditions d'adaptation à l'environnement*.

Classe de fonctionnement d'un RA

En général, le fonctionnement d'un RA est cyclique. Autrement dit, après une séquence de réflexions principales et d'appels à l'environnement appelée *cycle*, l'état X_μ, V_α du RA est identique à un état pris antérieurement. Deux RA comportant le même nombre de variables X_μ et V_α ont un *fonctionnement isomorphe* à partir de l'état initial si les réflexions principales et les appels à l'environnement se succèdent, pour chacun d'eux, de façon identique. Pour une famille de RA différant par la valeur des coefficients du support et par les valeurs initiales, peut être déterminée la liste des conditions garantissant un fonctionnement isomorphe : c'est la liste des *conditions de verrouillage* qui fixent une *classe de fonctionnement*. Si une condition de verrouillage est transgressée, on dit que le RA vérifie une *congruence exceptionnelle*.

Il faut distinguer les congruences qui ne changent pas la structure du cycle et celles qui transforment cette structure. Pour traiter ce problème, J.-P. Luminet [65] a introduit la notion de *valeurs initiales canoniques*. Dans le cas des RA les plus simples à une seule variable d'environnement, ces valeurs mettent en évidence, au moyen d'un exposant K, le nombre de réflexions principales (ou de produits de réflexions) qui peuvent être effectuées sans appel à l'environnement. Si, à partir de ces valeurs, aucune congruence exceptionnelle n'est vérifiée, on dit que le RA fonctionne en classe (0). La liste des conditions de verrouillage ne dépend pas de K en classe (0) et la structure du cycle obtenu pour $K+1$ se déduit algébriquement de la structure du cycle obtenue pour K au moyen des *cellules de Luminet* [65].

Les points du cycle qui ne sont pas canoniques vérifient un ensemble de congruences emboitées les unes dans les autres. Il semble naturel de chercher à caractériser cet emboitement au moyen d'entiers p-adiques.

Fonctionnement pseudocyclique

Supposons que, à partir d'un certain état, une séquence de réflexions se reproduise indéfiniment, que le RA ne passe pas deux foix par le même état et qu'il existe une transformation des X_μ, V_α mettant en évidence un comportement cyclique pour les variables transformées. Dans ce cas, le fonctionnement est dit pseudocyclique.

A2. Très bref rappel sur les structures de Lie

Les groupes de Lie résultent de l'imbrication de deux structures différentes : celle de variété différentiable et celle de groupe. Sophus Lie [25] étudie des transformations $x'^i = f^i(x^1, \ldots, x^n; a^1, \ldots, a^r)$, où les n f^i sont des fonctions continues et dérivables de n variables réelles x^i et de r paramètres réels a^ρ. Il étudie des transformations infinitésimales au voisinage de la transformation identité $f^i(x^1, \ldots, x^n; 0, \ldots, 0) = x^i$ et suppose que la famille de ces transformations forme un groupe au regard des paramètres. Cette structure de groupe implique que le produit de deux transformations successives caractérisées par les valeurs $(a^1, \ldots, a^r)$ et $(\delta a^1, \ldots, \delta a^r)$ des paramètres peut être réalisée par une seule transformation caractérisée par $(a^1 + da^1, \ldots, a^r + da^r)$, les δa^τ étant fonctions des a^ρ et dépendant linéairement des da^σ; certaines conditions de dérivabilité doivent être satisfaites.

On en déduit les dérivées partielles $\partial x'^i/\partial a^\rho$ en fonction de a^ρ et des quantités $U^i_\sigma(x'^1, \ldots, x'^n) = (\partial f^i(x'^1, \ldots, x'^n; a^1, \ldots, a^r)/\partial a^\sigma)_{a^\rho = 0}$ calculées pour tous les a^ρ nuls.

Les conditions d'intégrabilité du système aux dérivées partielles $\partial x'^i/\partial a^\rho$ (possibilité de permuter l'ordre des dérivations dans le calcul des dérivées secondes) sont exprimées en fonction des U^i_α et de leurs dérivées partielles par rapport aux x'^i. Après avoir introduit les r générateurs $X_\sigma = \Sigma_i U^i_\sigma \partial/\partial x'^i$, Sophus Lie trouve les relations :

$$X_\sigma X_\rho - X_\rho X_\sigma = \Sigma_\tau c^\tau_{\sigma\rho} X_\tau \qquad \text{(A1)}$$

où $c^\tau_{\sigma\rho}$ sont les coefficients de structure, indépendants des a^ρ. Le membre de gauche est un commutateur (dans la terminologie habituelle des physiciens). Les X_σ engendrent l'algèbre de Lie associée au groupe de Lie considéré.

Un exemple

Une algèbre de Lie peut être définie sur le corps des réels ou des nombres complexes. Prenons l'exemple de SU3, groupe des matrices g à coefficients complexes, unitaires $g^\dagger = g^{-1}$ et unimodulaires $\det(g) = +1$ conservant la norme $\psi^\dagger \psi$ d'un spineur à trois composantes complexes. Une matrice g peut être représentée par $g = \exp(i \Sigma \varepsilon^\rho X_\rho)$ où les ε^ρ sont des paramètres réels, les X_ρ des matrices hermitiques linéairement indépendantes, de trace nulle, et i le symbole des imaginaires $i^2 = -1$. Soient $g(\varepsilon)$ et $g(\eta)$ deux éléments du groupe dans le voisinage de l'identité. L'exponentielle est linéarisée : $g(\varepsilon) \approx \mathbf{1} + i \Sigma \varepsilon^\sigma X_\sigma$, $g(\eta) \approx \mathbf{1} + i \Sigma \eta^\rho X_\rho$. Le commutateur (au sens de la théorie des groupes) $g^{-1}(\varepsilon) g^{-1}(\eta) g(\varepsilon) g(\eta)$ s'écrit $\mathbf{1} - \Sigma \varepsilon^\sigma \eta^\rho (X_\sigma X_\rho - X_\rho X_\sigma)$. Comme il y a structure de groupe, cet élément peut s'écrire aussi $\mathbf{1} + i \Sigma \chi^\tau X_\tau$. Les X_σ engendrent l'algèbre de Lie de SU3 et correspondent aux générateurs du même nom. L'égalité des deux expressions précédentes fournit (A1).

Forme de Killing et système de racines

A partir des $c^\tau_{\sigma\rho}$ est défini le tenseur symétrique : $g_{\sigma\lambda} = \Sigma_{\tau\rho} c^\tau_{\sigma\rho} c^\rho_{\lambda\tau}$ connu sous le nom de tenseur métrique ou encore « forme de Killing ». E. Cartan a entrepris de classer les différentes algèbres. Dans le cas où le déterminant de ce tenseur n'est pas nul, ces algèbres sont dites semi-simples; elles sont sommes directes d'algèbres simples. Par un changement de base impliquant un calcul de valeurs propres ρ, on détermine d'abord, pour $i = 1, 2, \ldots, l$, les générateurs H_i qui commutent. Ils correspondent à la valeur propre $\rho = 0$ supposée l fois dégénérée (c'est la seule valeur propre qui puisse l'être). Les générateurs E_α, associés aux $r - l$ valeurs propres distinctes restantes vérifient $(H_i E_\alpha - E_\alpha H_i) = \alpha_i E_\alpha$. Les α_i définissent un vecteur α dans un espace à l dimensions, dual de l'espace vectoriel des générateurs H_i.

L'ensemble des vecteurs α constitue le « système de racines » de l'algèbre de Lie semi-simple considérée. On démontre les propriétés suivantes :

- Si α est une « racine », $-\alpha$ l'est également.
- Si α et β sont des racines, le double de leur produit scalaire divisé par la norme scalaire de l'un ou de l'autre est un entier.
- Dans le diagramme des racines, le transformé d'une racine β dans une réflexion le long de α, c'est-à-dire dans une symétrie définie par un hyperplan orthogonal à α et passant par l'origine, est aussi une racine.
- Le cosinus de l'angle de deux racines α, β ne prend que les valeurs :

$$0, \ \pm 1/2, \ \pm 1/\sqrt{2}, \ \pm \sqrt{3}/2, \ \pm 1.$$

L'algèbre de Lie est déterminée par le système de racines.

Graphe de Dynkin

Au système de racines est associé un réseau cristallographique à l dimensions; il est caractérisable par une forme quadratique qui dépend de la base choisie. Un graphe de Dynkin, qui est un graphe de Coxeter, définit une forme quadratique particulière, correspondant à un système de racine dit simple; ses coefficients sont des entiers. La notation proposée pour repérer les BCR est, en fait, une transposition de celle qu'a utilisée Dynkin. Le groupe de transformations des racines les unes dans les autres est appelé *groupe de Weyl.*

A3. Domaines multiplicatifs

Une forme quadratique $f(x_1, \ldots, x_N)$ à coefficients entiers engendre un domaine multiplicatif si le produit $f(x_1, \ldots, x_N) f(x'_1, \ldots, x'_N)$ est égal à $f(x''_1, \ldots, x''_N)$, les x''_i étant des expressions bilinéaires en x_i et x'_i. De nombreux mathématiciens ont travaillé sur ce problème. Dans le cas d'une somme de carrés, Hurwitz a montré que N devait être égal à 1, 2, 4 ou 8. Il n'existe pas d'autres possibilités (la démonstration a été établie par R. Bott et J. Milnor en 1958 à partir de travaux géométriques). A ces domaines, sont associés pour $N=2$, 4, 8 des nombres z, appelés respectivement : nombres complexes, quaternions, octaves de Graves-Cayley [84]. Soit $\mathcal{N}(z)$ le carré du module de z. Ces nombres vérifient $\mathcal{N}(z)\mathcal{N}(z') = \mathcal{N}(z * z')$.

Pour

$N=2$, la multiplication, notée $*$, est associative et commutative,

$N=4$, la multiplication, notée $*$, est associative et *non* commutative,

$N=8$, la multiplication, notée $*$, est *non* associative et *non* commutative.

Signalons qu'il existe des domaines multiplicatifs associés à des formes de degré plus élevé que 2.

Références

[1] J.-P. LUMINET, Relateurs arithmétiques stabilisés : Imbrication des cycles et méthode de classification, *Revue du Cethedec*, 62, 1980, p. 55-95.

[2] Ph. RIOT, Fondements mathématiques sous-jacents des relateurs arithmétiques, *Congrès Européen de Systémique CES*1, Lausanne, 3-6 oct. 1989, AFCET éd., p. 505-514.

[3] F. CHAUVET, Quelques applications de modèles associant algèbres de Lie et cheminements pseudo-aléatoires, *Congrès International de Cybernétique, Symposium* 23, Namur 1989, p. 1230-1237.

[4] H. S. M. COXETER, Extreme Forms, *Canadian Journal of Math.*, 3, 1951, p. 391-441.

[5] Th. MOULIN, Autoréférence et niveaux d'organisation, in *X^e Congrès International de Cybernétique*, Namur, 1983, p. 392-405.

[6] Th. MOULIN, Le relateur arithmétique, source de nouveaux concepts systémiques, *Rev. Internat. Systémique*, 3, 4, 1989, p. 459-483.

[7] F. CHAUVET et Th. MOULIN, Vers une esquisse de langage systémique fondé sur des classes de fonctionnement, des types de singularités et des nombres d'information virtuelle, *Congrès Européen de Systémique CES*1, Lausanne, 3-6 oct. 1989, AFCET éd., p. 525-534.

[8 *a*] R. VALLÉE, Aspects qualitatifs des informations observationnelle et pragmatique concernant un système cybernétique et son environnement, in *XI^e Congrès Int. de Cybernétique*, Namur 1986, p. 181-187.

[8 *b*] R. VALLÉE, Observation and Subjectivity, in *Information and Systems*, B. Dubuisson ed., Pergamon Press, 1978, p. 109-112.

[8 *c*] R. VALLÉE, Memorization in Systems Theory and the Perception of Time, in *Applied Systems and Cybernetics*, II, G. E. LASKER ed., Pergamon Press, 1980, p. 697-700.

[9] M. FLIESS, Realisation locale des systèmes non linéaires, algèbres de Lie filtrées transitives et séries génératrices non commutatives, *Invent. Math.*, 71, 1983, p. 527-537.

[10] S. BELGHITH et M.-M. ROSSET, Application des crochets de Lie à un problème de régulation thermique, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 299, série I, 16, 1984, p. 811-814.

[11] R. THOM, *Esquisse d'une sémiophysique*, InterEditions, Paris, 1988.

[12] Th. MOULIN, Cl. VALLET et D. VERNEY, Sur la possibilité de représenter le réel au moyen de relateurs arithmétiques, *Revue du Cethedec*, 1971, 122 p.

[13] Ph. RIOT, Relateurs arithmétiques et théorie des catastrophes, in *XII^e Congrès Int. de Cybernétique, Symposium* 23, Namur, 1989, p. 1199-1207.

[14] M. MENDÈS-FRANCE, Compte rendu de lecture : Biologie Théorique, Solignac 1987, *Pour la Science*, 154, août 1990, p. 102.

[15] M. CROZIER et E. FRIEDBERG, *L'Acteur et le Système*, Ed. du Seuil, Paris, 1977.

[16] F. CHAUVET, Détermination des conditions de verrouillage d'un relateur arithmétique stabilisé au moyen des groupes de Weyl (à paraître).

[17] Th. MOULIN, Utilisation en physique et en biologie de référentiels spatio-structuro-temporels engendrés par des relateurs arithmétiques, in *XI^e Congrès International de Cybernétique*, Namur, 1986, p. 261-292.

[18] Th. MOULIN, Possibilité d'applications dans quelques domaines de la biologie de relateurs à structure parallèle et hiérarchisée, in *Biologie Théorique*, Solignac 1986, A. KRETZSCHMAR éd., Éditions du CNRS, Paris, 1988, p. 179-185.

[19] Th. MOULIN, Une ébauche de modélisation d'interférences biologiques, in *Synergie et cohérence dans les systèmes biologiques*, Z. WOLKOWSKI éd., publié par E4, Dépt. Environnement, Univ. Paris-VII, 1985, p. 103-120.

[20] J.-P. CHANGEUX et A. CONNES, *Matière à pensée*, Éditions Odile Jacob, Paris, 1989.

[21] B. GROSSMAN, Membranes in string theory, trees, the Weil conjectures and the Ramanujan numbers, *J. Math. Phys.*, 30, 2, fev. 1989, p. 506-511.

[22] L. NOTTALE, Le relateur dual, *Revue du Cethedec*, n° 70, 1982, p. 43-92.

[23] M. FERRÉ, Relateurs arithmétiques : repère propre et invariance (2e partie), *Cahiers Systema*, 11, 1983, p. 54-110.

[24] L. NOTTALE, Algorithme de réduction des séquences engendrées par des relateurs arithmétiques, *Revue du Cethedec*, 69, 1981, p. 117-155.

[25] M. FERRÉ, The geometry of leaf morphogenesis: A theoretical proposition, *Acta Biotheoretica*, 33, 1984, p. 85-132.

[26] M. FERRÉ, Le relateur arithmétique : fonctionnement en axes propres et émergence, *Rapport de Recherche*, 182, ENSTA, 1984.

[27] Th. MOULIN, Configurations initiales planes, positionnées dans le repère propre, *Cahiers Systema*, 11, 1983, p. 111-135.

[28] Cl. VALLET et Th. MOULIN, Relateurs arithmétiques et modèles connexionnistes, *XIIe Congrès Int. de Cybernétique*, *Symposium* 23, Namur, 1989, p. 1208-1218.

[29] P. DELATTRE, *L'évolution des systèmes moléculaires*, Maloine-Doin, Paris, 1971.

[30] P. AUGER, Dynamique et thermodynamique des systèmes composés de plusieurs niveaux d'organisation, *Rev. Internat. Systémique*, 3, 2, 1989, p. 129-157.

[31] J. CHASTANG, Étirement d'un relateur arithmétique par adjonction d'une variable principale, *Cahiers Systema*, 13, mars 1991, p. 43-92.

[32] J. CHASTANG et F. CHAUVET, Étirement d'un relateur arithmétique par la variable d'environnement, *Cahiers Systema*, 14 (à paraître).

[33] Th. MOULIN et Cl. VALLET, Application of a building of neighbourhoods to the modelization of natural system, in *Nature, Cognition and System I*, M. CARVALLO éd., Kluwer Academic Pub., Dordrecht, 1988, p. 293-312.

[34] A. LE MÉHAUTÉ, *Les géométries fractales*, Hermès éd., Paris, 1990.

[35] M. BARSNLEY, *Fractals everywhere*, Academic Press, N.Y., 1988.

[36] K. J. FALCONER, *Fractal geometry*, John Wiley & Sons, N.Y., 1990.

[37] R. DELANNAY, J.-F. THOVERT et P. M. ADLER, Fractals et milieux poreux, *Rev. Internat. Systémique*, 3, 4, 1989, p. 485-514.

[38] B. G. WYBOURNE, *Classical Groups for Physicists*, J. Wiley & Sons, N.Y., 1974.

[39] N. BOURBAKI, *Groupes et algèbres de Lie*, Chapitres 4, 5, 6, Hermann, Paris, 1968.

[40] Th. MOULIN, Présentation sommaire des relateurs arithmétiques, *Cahiers Systema*, 12, avril 1986, p. 25-113.

[41] F. CHAUVET, Interprétation de relateurs arithmétiques stabilisés comme association de deux systèmes de racines (à paraître).

[42] E. DEL GIUDICE, G. PREPARATA et G. VITIELLO, Water as a Free Electric Dipole Laser, *Phys. Rev. Lett.*, 61, 9, 1988, p. 1085-1088.

[43] F. BOCCARA, Une tentative d'utilisation des relateurs arithmétiques en économie, *INSEE, Rapport d'un stage effectué à l'ENSTA*, oct. 1989.

[44] Th. MOULIN, Tentative de modélisation d'un milieu aqueux structuré, *XIIe Congrès International de Cybernétique*, *Symposium* 23, Namur, 21-25 août 1989, p. 1178-1189.

[45] H. LE GUYADER, Cl. VALLET, Th. MOULIN, L. LAFRENIÈRE et H. APTER, Arithmetical relators and virtual information, in *Information and Systems*, B. DUBUISSON ed., Pergamon Press, 1978, p. 119-129.

[46] Th. MOULIN, L. SAINT-PAUL, F. CHAUVET et Cl. VALLET, A method for developing models using arithmetical relators, in *Cybernetics and Systems'* 88, R. TRAPPL ed., Kluwer Academic Pub., 1988, p. 11-22.

[47] D. DURAND, *La systémique*, Collection « Que sais-je ? », n° 1795, 4e édition P.U.F., Paris, 1990.

[48] Cl. VALLET et Th. MOULIN, Un nouveau moyen d'appréhender les niveaux d'organisation majeurs observés dans la nature, *XIe Congrès International de Cybernétique*, Namur, 1986, p. 251-265.

[49] A. EDDINGTON, *Fundamental Theory*, Cambridge University Press, 1946.

[50] B. D'ESPAGNAT, *Une incertaine réalité. Le monde quantique, la connaissance et la durée*, Gauthier-Villars, Paris, 1985.

[51] D. BOHM, *Wholeness and the Implicate Order*, Routledge & Kegan Paul, Londres, 1980.

[52] O. COSTA DE BEAUREGARD, *Le temps déployé*, Éditions du Rocher, 1988.

[53] R. PENROSE, *The Emperor's New Mind*, Oxford University Press, 1989.

[54] M. D. MESAROVIC, D. MACKO et Y. TAKAHARA, *Theory of Hierarchical, Multilevel, Systems*, Academic Press, 1970; trad. française : Théorie des systèmes hiérarchiques à niveaux multiples, *Economica*, Paris, 1980.

[55] M. DAVIS, *Computability and Solvability*, Dover, 1976.

[56] G. J. KLIR, *Architecture of Systems Problem Solving*, Plenum Press, 1985.

[57] J. VON NEUMANN, *Theory of self-reproducing automata*, A. BURKS ed., University of Illinois Press, 1966.

[58] B. NICOLESCU, *Nous, la particule et le monde*, Editions Le Mail, 1985.

[59] B. ALBERTS, D. BRAY, J. LEWIS, M. RAFF, K. ROBERTS et J. D. WATSON, *Biologie moléculaire de la cellule*, Flammarion Médecine Sciences, Paris, 1986 (éd. orig. en anglais, Garland Pub., USA, 1983).

[60] V. KAC, *Infinite dimensional Lie algebras*, Cambridge University Press (1st ed. 1983), 2nd ed., 1987.

[61] S. C. KLEENE, *Logique mathématique*, Armand Colin, Paris, 1971 (version originale : *Mathematical Logic*, Wiley & Sons, N.Y., 1967).

[62] V. A. OUSPENSKI, *Leçons sur les fonctions calculables*, Hermann, Paris, 1966.

[63] X. SALLANTIN, L'épreuve de force, *Cahiers de la fondation pour les études de la Défense Nationale*, 2, 1975.

[64] X. SALLANTIN, *Le monde n'est pas malade, il enfante*, Editions O.E.I.L., Paris, 1989.

[65] J.-P. LUMINET, J. CHASTANG et Th. MOULIN, Structures de séquences engendrées par des relateurs arithmétiques, *Cahiers Systema*, 10, 1983, p. 69-149.

[66] Cl. VALLET, H. LE GUYADER et Th. MOULIN, Ambiguity and imprecision in arithmetical models of natural systems, in *Applied Systems and Cybernetics*, G. E. LASKER éd., VI, Pergamon Press, p. 3070-3075.

[67] L. ZADEH, The birth and evolution of fuzzy logic, *Internat. J. Gen. Systems*, 17, 2-3, 1990, p. 95-105.

[68] G. J. KLIR, A principle of uncertainty and information invariance, *Internat. J. Gen. Systems*, 17, 2-3, 1990.

[69] T. YAMAKAWA, Hardware implementation of fuzzy logic systems, *3rd Int. Conf. on Information Processing and Management of Uncertainty in knowledge-based systems* (*IPMU*), Paris, 2-6 juillet 1990 (à paraître).

[70] G. GENTZEN, *Recherches sur la déduction logique*, P.U.F., Paris, 1955 (version originale en allemand, 1934).

[71] P. LORENZEN, *Métamathématique*, Gauthier-Villars, Paris, 1967 (version originale en allemand, 1962).

[72] B. PAULRÉ, *La Causalité en Economie*, Presses Universitaires de Lyon, Lyon, 1985.

[73] C. P. BRUTER, *Sur la nature des mathématiques*, Gauthier-Villars, Paris, 1973.

[74] R. THOM, *Stabilité structurelle et morphogénèse*, W. A. Benjamin, USA, 1973.

[75] R. THOM, *Modèles mathématiques de la morphogénèse*, Collection 10×18, n° 887, U.G.E., Paris, 1974.

[76] Cl. VALLET, Modélisation arithmétiques de formes biologiques, *Cahiers Systema*, 9, nov. 1982, p. 5-40.

[77] J. MAURIN, *Simulation déterministe du hasard*, Masson, Paris, 1975.

[78] J. BASS, *Fonctions de corrélation, fonctions pseudo-aléatoires et applications*, Masson, Paris, 1984.

[79] G. CHAUVET, *Traité de Physiologie Théorique*, 3, *Physiologie intégrative : champ et organisation fonctionnelle*, Masson, Paris, 1990.

[80] V. ARNOLD, A. VARCHENKO et S. GOUSSEIN-ZADE, *Singularités des applications différentiables*, Editions MIR, Moscou, 1986 (version originale en russe, 1982).

[81] P. SLODOWY, Simple singularities and simple algebraic groups, *Lectures Notes in Math.*, 815, Springer Verlag, Berlin.

[82] T. POSTON et I. STEWART, *Catastrophe Theory and its Applications*, Pitman, Londres, 1978.

[83] Cl. VALLET, Th. MOULIN, H. LE GUYADER et L. LAFRENIÈRE, Emergence et imbrication de niveaux d'organisation dans les systèmes complexes, *VIII^e Congrès Int. de Cybernétique*, Namur, 1976, p. 187-199.

[84] E. STUDY et E. CARTAN, *Nombres complexes*, in *Œuvres complètes*, partie II, I, Gauthier-Villars, 1953, p. 107-246 (texte original, paru dans l'Encyclopédie des Sciences, en 1908, p. 329-468).

REVUE INTERNATIONALE DE SYSTÉMIQUE
Vol. 5, N° 5, 1991, pp. 561 à 581

LES THÉORIES DE L'INFORMATION

J.-P. DELAHAYE

Université des Sciences et Techniques de Lille,
Laboratoire d'Informatique Fondamentale de Lille[1]

Résumé

La notion d'information dispose-t-elle d'une ou de théories satisfaisantes ? Mathématiquement elle en dispose de plusieurs dont nous tentons de montrer qu'aucune n'est en mesure de constituer une théorie complète et définitive de l'information. Nous insistons sur l'intérêt de théories récentes comme celle de Chaitin-Kolmogorof et celle de Bennett. En physique le concept d'information est difficile à identifier quel que soit l'importance de ses liens avec la thermodynamique, liens qui semblent avoir subi une refonte de première importance très récemment grâce aux travaux de Bennett et Zurek. Quant à la biologie elle cumule toutes les difficultés, car de toute évidence un sens pragmatique doit être attribué au concept d'information biologique qui rend inutilisables ou incomplètes les théories mathématiques de l'information et peu probable l'utilité des théories thermodynamiques de l'information.

Abstract

Is there a satisfactory theory of information? There are several mathematical theories of information, and we try to show that none is the real complete and ultimate theory we are looking for. We insist on the interest of several new propositions in the field : the algorithmic theory of information of Chaitin-Kolmogorof, and the theory of logical depth of Bennett. In physics the concept of information is obviously related to thermodynamics, but a new point of view (W.H. Zurek) about this relationship has been very recently proposed that forces us to reconsider many of the old (and sometime not sufficently cautious) uses of simple identifications concerning information and physical entropy. In biology, the theory of information is in a more difficult position because elementary reflexions prove that a pragmatic sense to information cannot be avoided, and must be added to the mathematical sense and the physical sense of information.

1. U.A. CNRS 369, Bât. M3, 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France.

Rev. intern. systémique. 0980-1472 Vol. 5/91/05/ 561 /21/$ 3.10/© Afcet Gauthier-Villars