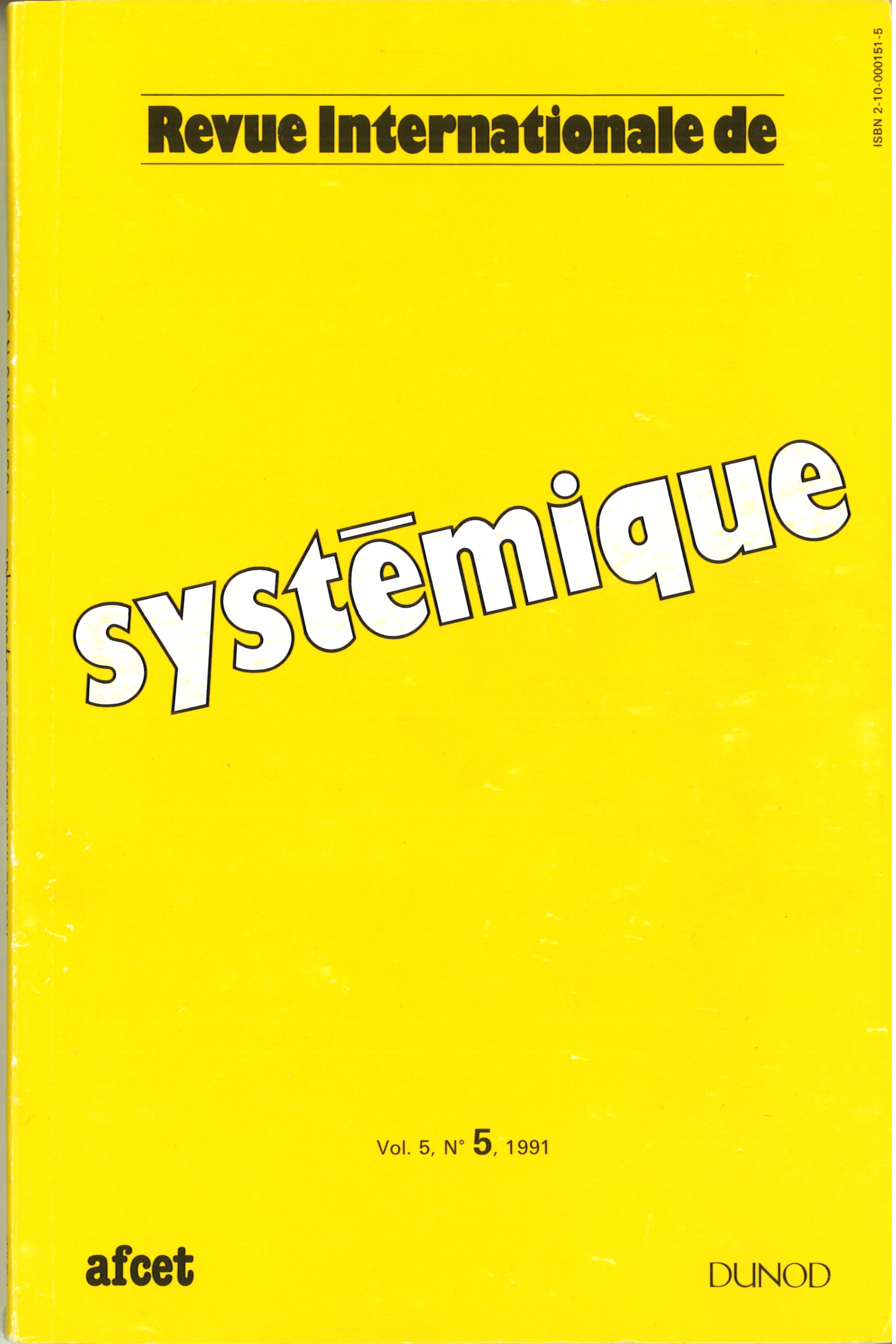

AFSCET

Revue Internationale de
systémique

Revue Internationale de Sytémique

volume 05, numéro 5, page 583 - 600, 1991

Mathématiques profondes et physique : les racines philosophique d'une mise en système

Jean-Paul Delayaye

Numérisation Afscet, août 2017.

REVUE INTERNATIONALE DE SYSTÉMIQUE
Vol. 5, N° 5, 1991, pp. 583 à 600

MATHÉMATIQUES PROFONDES ET PHYSIQUE : LES RACINES PHILOSOPHIQUES D'UNE MISE EN SYSTÈME

D. LAMBERT

Chargé de cours en philosophie et histoire des sciences [1]

Résumé
Les liens qui se tissent entre mathématiques et physique donnent naissance à un système de connaissances particulièrement fructueux. Pour comprendre cette « mise en système », nous partons d'une constatation : il existe des mathématiques plus profondes que d'autres. Scrutant les racines philosophiques de telles mathématiques, nous montrons qu'elles réalisent la manifestation concrète de l'Idée de réalité. Ceci nous permet d'articuler les mathématiques à la physique qui incarne également une même Idée tout en utilisant ces mathématiques profondes pour structurer les données empirico-formelles. La « mise en système » invite donc la pensée scientifique à rechercher dans un terrain méta-physique ce qui lui confère un sens et une consistance.

Abstract
The relations between mathematics and physics give rise to a fruitfull system of knowledges. In order to understand the constitution of such a system, we start from the following fact: there exist "deep mathematics". Studying the philosophical roots of the latter, we show that they realize the concrete manifestation of the Idea of Reality. This allows us to understand the relation between mathematics and physics which incarnates the same Idea and which uses these deep mathematics. The constitution of a system of knowledges invites the scientific thought to look for a meta-scientific field which gives him sense and consistence.

1. Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix, Namur, Département Sciences-Philosophies-Sociétés, 61, rue de Bruxelles, B-5000 Namur, Belgique.

Rev. intern. systémique. 0980-1472 Vol. 5/91/05/ 583 /18/$ 3.80/© Afcet Gauthier-Villars

1. La problématique d'une mise en système

Les rapports entre disciplines scientifiques sont souvent conçus sur le mode de l'utilité réciproque. Tel problème concret issu d'une discipline particulière va susciter l'utilisation d'outils théoriques développés dans d'autres champs disciplinaires. Le recours à la chimie en biologie ou aux mathématiques en physique, en économie, etc, sera perçu comme pur transfert d'outils entre deux « Mondes » conceptuels aux frontières bien délimitées. Or, une telle description des rapports interdisciplinaires ne semble plus adéquate pour saisir la richesse des dynamiques qui font se rencontrer diverses disciplines. La physique et les mathématiques, ne peuvent se penser dans une pure hétéronomie, par exemple. Leurs développements font apparaître des liens constitutifs d'imbrications et d'entraînements mutuels. C'est qu'au fond, ces deux champs disciplinaires forment un véritable *système de connaissances* où, au cœur de la diversité des approches, des objets et des méthodes, se dessinent des lieux d'articulation ou s'estompent les différences. Ces lieux procèdent-ils d'un découpage artificiel et arbitraire de nos espaces rationnels ou, au contraire, trouvent-il leur consistance dans quelque principe épistémique ou extra-épistémique? Le but de ce travail est précisément de répondre à cette question qui pourrait se reformuler comme suit : quelles sont les racines philosophiques qui confèrent à la « mise en système » de la physique et des mathématiques sa consistance propre?

Partant d'une analyse des mathématiques, nous mettons en évidence des concepts, des structures..., plus « profonds » que d'autres et nous caractérisons ce type de « profondeur » au niveau épistémologique. Ensuite, nous dégageons les racines philosophiques des « mathématiques profondes » en faisant appel à une lecture platonicienne des sciences. Plus précisément, nous montrons que ce genre de mathématiques est le champ où s'inscrit concrètement l'Idée de réalité dont les traits majeurs sont la puissance d'engendrement d'un domaine de cohérence, la stabilité et ce que l'on peut appeler une opacité, une résistance. Les mathématiques profondes sont précisément celles qui permettent une mise en forme du savoir empirico-formel de la physique (conjoncture de Penrose). Nous comprenons dès lors, comment la physique et les mathématiques peuvent donner naissance à un système de connaissances articulées. Ces deux disciplines participent, au niveau des mathématiques profondes d'une même Idée – celle de réalité – qui donne consistance à leur articulation et qui est le principe extra-épistémique du système de connaissances qu'elles réalisent.

L'institution concrète du système de connaissance « mathématiques-physique » convie la pensée à scruter, au-delà et par-delà l'horizon que dessinent les pratiques scientifiques, le sol fondateur qui en assure la consistance. Par cette notion de « mise en système » de plusieurs disciplines, les sciences, sans renoncer aucunement à elles-mêmes et dans leurs dynamiques propres, nous convient à restaurer l'interrogation métaphysique qu'une compréhension étriquée du savoir épistémique avait définitivement condamnée.

2. Des mathématiques plus profondes que d'autres?

Dans un essai de typologie des théories mathématiques, Dieudonné (1977, 1982) distingue quatre familles de problèmes, c'est-à-dire de questions, d'énigmes, qui sont bien souvent à l'origine des travaux du mathématicien. Il y a tout d'abord les problèmes « morts-nés », ceux qui restent posés et qui n'évoluent pas. Des générations de mathématiciens s'y confrontent, mais leurs efforts demeurent vains. L'existence ou non d'une infinité de nombres de Mersenne premiers de la forme $2^p - 1$ où p est un nombre premier ou l'irrationalité de la constance d'Euler, sont des problèmes de ce type. Il y a ensuite les problèmes qui admettent une solution, parfois ingénieuse, mais qui ne donnent lieu à aucun progrès décisif dans d'autres domaines des mathématiques. Beaucoup de problèmes soulevés par Diophante sont de ce type. Viennent alors les problèmes dont la résolution conduit à la découverte d'une méthode pouvant être utilisée dans de larges classes de questions mathématiques différentes. Les méthodes qui sont employées pour prouver la transcendance des nombres appartiennent à cette catégorie. Ainsi, en élaborant de mieux en mieux la première méthode de Hermite, initialement adaptée à la base e des logarithmes népériens, on a obtenu l'irrationalité de Pi et de quantité d'autres nombres (*Cf.* Gramain, 1984). Il y a enfin les problèmes qui ont engendré des idées nouvelles donnant naissance à des théories générales très fécondes. La théorie des groupes, dégagée progressivement des problèmes liés à la résolution d'équations algébriques (Galois) en est l'exemple le plus typique. La topologie algébrique, issue de la recherche d'invariants de certains polyèdres en est un autre example significatif. L'exemple le plus marquant à ce propos est peut-être à l'heure actuelle l'envahissement des mathématiques par la géométrie algébrique (Dieudonné, 1974). Issue des travaux d'Abel, Jacobi, Weierstrass et Riemann sur les intégrales elliptiques, elle fournit maintenant un grand nombre de concepts et de structures très féconds dans un grand nombre de branches des mathématiques (schémas, topologies de Grothendieck, espaces algébriques, etc.). Ces théories que nous venons de mentionner et dont l'utilité se révèle au cœur de domaines variés et éloignés, Dieudonné les qualifie de « fondamentales » et de « profondes ». Pourquoi? La réponse vient sans ambages : « ... parce qu'elles font comprendre le sens des choses... » (Dieudonné, 1982, p. 30). Il existe donc en mathématiques des structures et des concepts plus profonds que d'autres, dans la mesure où ils sont porteurs d'un sens.

Qu'est-ce à dire? Ces mathématiques profondes donnent à la pluralité des activités mathématiques une unité, une cohérence globale. Ce sens, dont nous parlions ci-dessus, c'est précisément cette place que se voit assigner une théorie particulière dans une totalité structurée qui la situe dans un réseau de relations.

L'histoire des mathématiques, relue par Dieudonné, nous révèle donc l'existence de problèmes faisant surgir des structures profondes qui unifient des théories apparemment disconnectées. A l'inverse, des théories éloignées peuvent susciter des problèmes similaires qui apparaissent comme des nœuds de relations tissées entre elles. Ces « problèmes-nœuds » sont révélateurs, au niveau local, d'une unité des mathématiques manifestée, au niveau global, par les structures profondes. On pourrait parler dans ce cas de problèmes profonds. Un exemple tout-à-fait remarquable à ce propos est celui du problème de factorisation de Hurwitz (1898). Il s'agit de trouver les entiers r, s et n tels que l'égalité suivant soit vérifiée :

$$(x_1^2+\ldots+x_r^2)(y_1^2+\ldots+y_s^2)=(z_1^2+\ldots z_n^2)$$

où z_i est une forme bilinéaire de $x=(x_1, \ldots, x_r)$ et $y=(y_1, \ldots, y_s)$. A l'origine, Hurwitz (1898) avait considéré le cas $r=s=n$ qui se trouve être lié à une propriété essentielle des algèbres de Cayley-Dickson de basse dimension ($n=1$, les réels; $n=2$, les complexes; $n=4$, les quaternions et $n=8$, les octonions). Il montra que, dans ce cas, les seules solutions du problème sont obtenues pour $n=1$, 2, 4 ou 8. Si r, s et n ne sont plus tous égaux, nous obtenons un problème d'une telle généralité que sa solution n'est pas encore connue à l'heure actuelle. Le cas $r=s=n$, lié à des propriétés des représentations d'algèbres de Clifford euclidiennes, a été résolu par Radon (1922), Hurwitz (1923, œuvre posthume) et trouve son expression la plus adéquate dans le formalisme spinoriel développé par Crumeyrolle (1990) et appliqué par Randriamihamison (1990), pour traiter une généralisation non euclidienne du problème. L'histoire est révélatrice de l'importance accordée à l'analyse des solutions de cette propriété de factorisation de Hurwitz. On en trouve déjà des traces chez Brahmagupta (Dieudonné, 1987) pour le cas $r=s=n=2$, au VII^e siècle. La solution du cas $r=s=n=4$ était connue d'Euler, anticipant les travaux de Hamilton sur les quaternions en 1843 (Dickson, 1919). L'analyse du cas $r=s=8$ trouve son origine dans les travaux de Gauss et aboutit, au terme d'une longue série de travaux, remarquablement décrits par Dickson (1919), à l'introduction des octaves de Cayley-Graves. Ainsi que l'a montré Shapiro (1984), le problème de Hurwitz se situe explicitement à la croisée de

l'algèbre (algèbres de composition, modules projectifs, théorie des formes quadratiques), dont il est issu mais encore de la combinatoire (matrices d'Hadamard, théorie des graphes), de la topologie (immersions et plongements d'espaces projectifs dans des espaces euclidiens, champs de vecteurs sur des sphères et des espaces projectifs, théorie homotopique des sphères et fibrations de Hopf), de la géométrie et de la théorie des groupes de Lie (sphères isoclines dans des variétés de Grassmann, groupe de Heisenberg et groupe d'automorphisme d'une formule de composition) et enfin de la théorie des équations différentielles (en connexion avec les équations de Laplace et de Cauchy-Riemann, systèmes elliptiques, applications harmoniques).

Nous retrouvons chez Connes, dans son dialogue avec Changeux (1989), une caractéristique de ces structures ou problèmes profonds : leur générativité. Le grand spécialiste de la géométrie non-commutative dit en effet : « Un des traits essentiels du travail du mathématicien est de reconnaître la cohérence interne et le caractère génératif propre à certains concepts. Des concepts très simples arrivent à engendrer toutes sortes d'autres idées ou d'autres modèles. De proche en proche, on a vraiment l'impression d'explorer un monde..., et d'atteindre une cohérence qui montre qu'on en a exploré entièrement une région. Dans ces conditions, comment ne pas sentir que ce monde a une existence indépendante » (Changeux et Connes, 1989). Ce texte est intéressant dans la mesure où il montre que les mathématiques profondes, celles qui se caractérisent par un pouvoir génératif en même temps qu'unificateur, semblent posséder une existence autonome par rapport à l'activité du mathématicien. Ce dernier, corrélativement, relit ses travaux en termes de découvertes plutôt que de constructions. Quelle est l'origine de cette autonomie des mathématiques profondes? Ces dernières renvoient-elles à des structures particulières du fonctionnement cérébral, comme le voudrait Changeux (1989) ou sont-elles la trace d'un Monde (platonicien) d'Idées mathématiques. Ces questions nous occuperont dans la troisième partie de notre travail. En attendant, continuons notre enquête préliminaire, en creusant cette interrogation : « existe-t-il vraiment des mathématiques plus profondes que d'autres? »

Une des manières d'y répondre serait d'exhiber un type de concept moins profond, moins génératif par exemple. Pour ce faire, comparons les deux structures algébriques suivantes. D'une part, l'algèbre des nombres complexes ordinaires et d'autre part l'algèbre des nombres complexes hyperboliques ou nombres doubles (introduit par Clifford, 1873). La première, est réalisée comme un ensemble de nombres $x+iy$ ou x, y sont réels et $i^2=-1$. Elle constitue un corps dont l'importance en mathématiques (fonctions de variables complexes, théorème intégral de Cauchy, espaces analytiques compacts, variétés kähleriennes,...) et en physique (c'est l'existence des complexes qui sous-tend toute la mécanique quantique par exemple) n'est plus à démontrer. Les complexes nous offrent le plus bel exemple de générativité. Issus des travaux de Tartaglia et Cardan sur la résolution d'équations algébriques du troisième degré ils ont progressivement envahi toutes les branches des mathématiques. La seconde algèbre peut être représentée sous la forme d'un ensemble de nombres $x+jy$ où x, y sont réels et $j^2=+1$. Celle-ci n'a pas donné lieu à un développement similaire à celui des complexes ordinaires. Pourquoi ? Tout d'abord parce que la structure de corps est perdue (il existe des diviseurs de zéro : tous les nombres tels que $x^2-y^2=0$). Ensuite, et surtout, parce que l'analogue de la théorie des fonctions holomorphes ne débouche sur aucun concept nouveau. Les fonctions holomorphes hyperboliques sont en fait une manière condensée d'écrire un couple d'ondes se déplaçant à vitesse unité dans des directions opposées (Laurentiev, Shabat 1980). D'une certaine manière, on n'obtient rien de nouveau, puisque les propriétés de telles ondes sont entièrement comprises dans le cadre de la théorie des fonctions de deux variables réelles. Le seul progrès qui se dégage de cette analyse hyperbolique est non de l'ordre du concept mais bien plutôt de l'ordre de la notation redondante. Par contre, les fonctions holomorphes ordinaires ne se comportent pas simplement comme des couples de fonctions réelles à deux variables. La théorie des variables complexes ordinaires engendre donc un domaine conceptuel radicalement nouveau et fécond. Dès lors, il semble fondé de dire que le concept de fonctions holomorphes hyperboliques est moins profond que son équivalent classique.

Une confirmation éclairante de la différence de fécondité entre les fonctions complexes ordinaires et les fonctions complexes hyperboliques se dégage du travail de P. Senn (1990) sur l'ensemble de Mandelbrot. Celui-ci est défini de la manière suivante : c'est l'ensemble des nombres complexes (usuels) C tels que la suite engendrée par l'itération $Z_{n+1}=Z_n+C$ avec $Z_0=C$ reste bornée quand n tend vers l'infini. On sait qu'un tel ensemble est un fractal dont la frontière présente une complexité extraordinaire. Par contre, lorsqu'on remplace les variables complexes Z_n par des complexes hyperboliques, l'analogue de l'ensemble de Mandelbrot n'est rien d'autre qu'un carré ! Le passage aux nombres hyperboliques n'est donc pas générateur d'objets mathématiques nouveaux, ce qui confirme (visuellement !) l'idée que cette algèbre de nombres est en un sens moins « profonde » que celle des complexes ordinaires.

Le physicien théoricien Penrose a développé, récemment, une réflexion intéressante sur les ordinateurs, l'esprit et les lois de la physique (Penrose, 1989). Aux principes de cette étude, se situe une approche éclairante des mathématiques, dans laquelle est esquissée une caractérisation (partielle) de ce que pourraient être les structures profondes de celles-ci. Pour Penrose, certaines parties des mathématiques que l'on qualifie de profondes ont en fait un caractère non-algorithmique. Afin de préciser le sens de cette affirmation, rappelons que les mathématiciens (et les informaticiens) considèrent des ensembles « récursivement énumérables », c'est-à-dire pouvant être explicitement engendrés par un algorithme, et des ensembles « récursifs » qui sont récursivement énumérables et dont les complémentaires respectifs le sont aussi. L'ensemble des théorèmes d'un système formel est ainsi récursivement énumérable sans être pour autant récursif. Par contre, l'ensemble des propositions qui s'interprètent comme vraies à partir d'un tel système est non-récursif, non-récursivement énumérable et son complémentaire dans l'ensemble de toutes les propositions est aussi non-récursivement énumérable. Penrose nous livre, dans l'ouvrage évoqué ci-dessus, quatre exemples de problèmes non-récursifs qui sont au cœur de domaines très féconds de recherche contemporaines. Premièrement, la théorie des équations diophantines qui se donne comme but de trouver des solutions entières de systèmes d'équations algébriques à coefficients entiers. En fait, on sait maintenant qu'il n'existe aucun algorithme pour décider si un système d'équations diophantines admet ou non de telles solutions. Deuxièmement, la topologie des variétés différentiables. En dimension deux, on peut décider (algorithmiquement !) si deux variétés sont topologiquement équivalentes. Il suffit pour cela de vérifier l'égalité des nombres de trous (genre de la variété) respectifs que possèdent ces variétés. En dimension quatre par contre, il a été démontré qu'il n'existait aucune procédure algorithmique pour décider de l'équivalence ou de la non-équivalence topologique des variétés. Remarquons, au passage, que le problème reste ouvert pour ce qui est de la dimension trois. Troisièmement, la théorie des systèmes formels. Celle-ci a mis en évidence le problème suivant, baptisé : « problème des mots ». Soit deux mots arbitraires d'un langage (BIMBY et PELUCHE, par exemple) et un ensemble de règles de déductions (BY=CHE, I=LU, MCHE=CHE, BL=PEL) peut-on dériver le second mot du premier en utilisant ces régles ? Dans le cas de notre exemple, la réponse est affirmative, en effet : BIMBY=BIMCHE=BLUMCHE=BLUCHE=PELUCHE. Pourtant, dans un cas général, on démontre qu'il n'existe aucune solution algorithmique à ce problème. Quatrièmement, la théorie des espaces quantiques dans laquelle interviennent les pavages non-périodiques du plan euclidien (Connes, 1990). Une question centrale de cette théorie concerne l'existence d'une procédure algorithmique permettant de décider si oui ou non, un pavage du plan euclidien est possible en prenant comme motif de base un ensemble fini de formes polygonales données arbitrairement ? La réponse est négative : il n'existe pas de telle procédure et le problème général du pavage est donc une partie des mathématiques non-récursives.

Dans sa thèse principale : « Essai sur les notions de structure et d'existence en mathématique », Lautman (1937), ce philosophe des sciences que M. Loi (1977) a légitimement qualifié de mathématicien, nous offre une réflexion magistrale sur la notion de réalité. Pour lui, la réalité en mathématiques, ne peut être posée au niveau des êtres mathématiques, dont les propriétés varient en fonction des structures dans lesquelles ils sont plongés (le nombre 21, par exemple, possède dans le corps Q des rationnels l'unique factorisation première $3 . 7$. Sur l'extension $Q(\sqrt{-5})$ de Q, cette factorisation n'est plus unique. On vérifie sans peine que $(1+2\sqrt{-5}).(1-2\sqrt{-5})$ est aussi une factorisation possible). Elle doit plutôt se poser au niveau global des théories. Les mathématiques se « chargent » de réalité dans la mesure où le mouvement même des théories incarne des liens entre notions dialectiques. Ainsi, l'idée de la connexion entre l'essence et l'existence s'incarne merveilleusement dans la théorie des surfaces de Riemann où une propriété intrinsèque de ces surfaces (leur genre) engendre l'existence d'intégrales abéliennes linéairement indépendantes, conférant, de ce fait, aux domaines théoriques concernés (topologie et analyse) un statut de réalité authentique. Nous retrouvons, chez Lautman, l'idée que l'existence profonde en mathématique et donc le fait qu'un ensemble de concepts ou de théories acquièrent une réalité, sont intimement liés à la générativité de ces concepts : à leur potentialité créatrice. Lautman nous fait découvrir également une autre notion de « profondeur » liée à la hiérarchie des concepts, eu égard à un ordre de « perfection ». Ainsi, une surface est moins « parfaite » que sa surface universelle de recouvrement, vu que la deuxième est toujours simplement connexe alors que la seconde peut ne pas l'être. Il y a donc une simplicité inhérente à cette surface universelle. Mieux, le passage d'une surface de Riemann à sa surface universelle de recouvrement rend la manipulation de fonctions complexes effectivement plus simple. En effet, sur cette dernière existe toujours globalement une « uniformisante », c'est-à-dire une manière d'éliminer les points de branchement d'une fonction (où celle-ci est multiforme). De même, les différentes extensions algébriques d'un corps présentent à la fois cette « perfection » d'inclure des racines de polynômes qui ne s'y trouvaient pas initialement et cette capacité de rendre les calculs algébriques plus commodes. Cette définition de « profondeur mathématique » en terme de « perfection » et de « simplicité » ne nous éloigne pas de celle qui se rattache à la générativité? Ainsi que l'a souligné Lautman, lui-même, la « perfection » se double inévitablement d'une capacité de genèse. Ainsi, pour ne prendre qu'un exemple, c'est la simple connexité intrinsèque à la surface universelle de recouvrement, indice de perfection, qui devient génératrice de l'uniformisante globale.

On pourrait illustrer les propos de Lautman par la considération d'une théorie très féconde à l'heure actuelle et qui s'est constituée comme telle à

partir des travaux de Bochner (1940) et Morrey (1948) : la théorie des applications harmoniques (*Cf*. Eells et Lemaire, 1978, 1988). Par définition, une application harmonique est une solution d'une équation non-linéaire généralisant d'une part l'équation des géodésiques et d'autre part l'équation de Laplace sur une variété (pseudo-) riemannienne. Le point remarquable de cette théorie est le fait qu'une telle équation non-linéaire peut être déduite d'une intégrale d'action particulièrement élégante et concise, via un principe variationnel ("The beautifully balanced and simple variational principle for harmonic maps...", Misner, 1978). De plus, cette simplicité d'écriture facilite grandement l'étude des symétries que l'on peut imposer à ces applications. La théorie des applications harmoniques a engendré des résultats importants dans une foule de branches des mathématiques. Citons par exemple : l'existence de plongements minimaux de S^2 dans S^3 équipée de métriques arbitraires, les restrictions topologiques à l'existence d'une métrique de courbure scalaire positive sur une variété de dimension 3 ou la caractérisation des applications harmoniques entre surfaces via des applications holomorphes dans des espaces de twisteurs (*Cf*. Eells et Lemaire, 1988). La parfaite simplicité du principe variationnel des applications harmoniques devient donc puissance de genèse.

Au terme de cette section, il semble pertinent de considérer une notion de « profondeur » d'une théorie, d'un concept mathématique. Deux traits caractéristiques de cette « profondeur » semblent se dégager. D'une part, *la capacité génératrice* (chez Dieudonné, Connes, Lautman) c'est-à-dire cette puissance d'engendrement de problèmes et concepts nouveaux. D'autre part, cette *résistance* (Penrose) qu'opposent les objets mathématiques alors même que l'on tente d'en maîtriser les propriétés (par une méthode algorithmique, par exemple).

Corrélativement, ces quelques réflexions montrent qu'il existe aussi des mathématiques « superficielles » qui n'ouvrent aucun horizon nouveau et dont le seul mérite consiste peut-être à réexprimer, d'une autre manière, des contenus pré-existants sans leur conférer quelque surcroît de dynamisme. Remarquons, au passage que la générativité n'est pas toujours liée à la notion de généralisation. Certains problèmes, très particuliers (liés à des dimensions d'espaces très précises, par exemple), dont on ne connaît ni d'extension ni même parfois de solution, peuvent être très génératifs, dans la mesure où ils sont des nœuds à partir et à l'occasion desquels se développent des foules de méthodes effectives. (*Cf*. Les questions relatives aux propriétés des nombres premiers, par exemple).

Il nous faut maintenant scruter la portée épistémologique d'une telle distinction entre mathématiques profondes et superficielles. Doit-on limiter notre étude au seul domaine mathématique ou doit-on plutôt porter notre regard « en-haut » et « en amont » vers un terrain philosophique inspirateur de l'activité scientifique. N'est-il pas, de plus, nécessaire de suivre, « en aval », la dynamique profonde des mathématiques dans des disciplines qui en sont constitutivement dépendantes : la physique par exemple. C'est ce qu'il nous faudra analyser dans les deux sections suivantes.

3. Les racines philosophiques des mathématiques profondes

Aux racines de ces domaines des mathématiques que nous avons qualifiées de « profondes », s'esquissent les affleurements d'une pensée philosophique qui en constitue la dynamique propre. En effet, ce qui caractérise avant tout ces mathématiques, c'est l'idée d'une *genèse potentielle* (générativité). Ce qui est en jeu dans cette puissance d'engendrement, c'est la constitution d'un *système de cohérence*. De fait, les exemples évoqués ci-dessus, montrent que ces mathématiques sont des foyers d'où germent un grand nombre de concepts ou de théories interdépendants, faisant apparaître du même coup un système logiquement cohérent. Les mathématiques profondes incarnent donc, au plus intime d'elles-mêmes, cette Idée d'un déploiement progressif d'un système de cohérence à partir d'un foyer bien localisé. Ce dernier, au terme du processus historique de déploiement, n'est plus perçu comme « centre de perspective », mais comme pure occasion de la manifestation de l'Idée de genèse d'un système cohérent radicalement nouveau. Pour caractériser cette nouveauté, il est intéressant de noter que le système cohérent ainsi déployé met en évidence une sorte de *stabilité*. Par ce terme, nous désignons « l'invariance » du système de cohérence par rapport à des modifications de point de vue, de notations, de traductions etc. Ainsi, comme nous l'avions déjà entrevu plus haut, la théorie des fonctions holomorphes à une variable complexe hyperbolique ne peut entrer dans la catégorie des mathématiques profondes vu qu'elle se réduit à un changement de notation près à un domaine particulier de la théorie des fonctions de deux variables réelles. La théorie des fonctions holomorphes usuelles, par contre, est « stable » dans la mesure où toute tentative de réduction à une théorie utilisant des fonctions à deux variables réelles ou des fonctions définies sur d'autres corps algébriques, est vouée à l'échec.

On peut donc résumer notre propos comme suit : les mathématiques profondes sont les lieux où s'incarne l'Idée d'une genèse d'un système cohérent stable. Le cadre philosophique permettant de penser adéquatement ce genre de mathématiques semble être celui où l'on peut concevoir l'inscription concrète et vivante d'une Idée dans un champ qui lui préexiste. Or ce cadre est précisément celui de la philosophie de Platon, comme l'avait déjà mis en lumière Lautman (1937). Ce fait est d'ailleurs confirmé par des adhésions implicites ou même explicites de grands mathématiciens au platonisme (Changeux et Connes, 1989; Penrose, 1989). Ces tendances platoniciennes ne relèvent pas chez ces scientifiques d'une question du goût, mais sont un prolongement naturel de la dynamique sous-jacente à leurs activités proprement mathématiques. Si l'on suit les lignes de force dessinées par les mathématiques profondes, on se voit conduit au seuil d'une réflexion platonicienne sur le statut, la dynamique et l'incarnation concrète des Idées, dont celle de genèse d'un système de cohérence stable n'est qu'un exemple parmi d'autres. Les prolongements de ces lignes de force convergent bien au-delà du terrain strictement épistémique. Et, il semble à ce propos, qu'un essai de compréhension de l'origine des mathématiques profondes en termes unilatéralement biologiques (structures cérébrales, darwinisme mathématique,...), tel que le conçoit Changeux (1989) par exemple, ne touche pas le cœur de la problématique; on ne peut, de fait, confondre l'idée et le lieu de son inscription biologique ou autre!

Lautman et la plupart des mathématiciens n'exploitent qu'une partie de la philosophie platonicienne. Ce qu'ils considèrent se cantonne autour de la fonction logique d'intelligibilité de la notion d'Idée. Or, cela ne permet pas de capter toute la richesse philosophique des mathématiques profondes. L'Idée a également, chez Platon, une fonction cosmologique qui nous est contée dans le Timée (trad. L. Robin, 1950). Dans cette œuvre, nous voyons le démiurge, médiateur entre le sensible et l'intelligible, façonner un monde déjà-là (la matière) sur base d'un modèle intelligible, afin de faire surgir les choses sensibles dans leur existence même. Or, ce qui est intéressant, pour notre propos, c'est que le caractère irrationnel et chaotique de cet Autre de l'intelligible qu'est la matière (que Platon qualifie aussi de « réceptacle », de « cause errante »), n'est jamais entièrement résorbé. Il s'agit ici, non pas d'une impuissance de l'intelligible à pénétrer complètement la matérialité, mais au contraire d'une impuissance radicale de la matière à recevoir pleinement la marque de l'intelligibilité (Ricœur, 1954). Cet écart entre l'Idée, signe de l'intelligibilité et son Autre se retrouve manifesté au sein des mathématiques profondes par la résistance (souvent irréductible) qu'opposent certains objets formels à toute tentative de maîtrise de leurs propriétés.

Le champ concret de telles mathématiques est donc le lieu privilégié de la manifestation de l'Idée de genèse d'une cohérence stable, où s'expérimente du même coup la résistance incontournable de l'Autre de la cohérence : ce support (« nourrice de tout ce qui naît », comme le qualifie Platon) qui rend présent l'intelligible. Si nous suivons le développement des mathématiques profondes, nous y reconnaissons une action éminemment « démiurgique ». Le mathématicien n'est pas au sens fort du terme, créateur de mathématiques profondes. Il est, comme le mythe platonicien du démiurge nous le suggère si clairement, *un médiateur* dont l'action se trouve tout à la fois, initiée et entretenue par une intelligibilité préexistante et limitée par l'inertie irréductible qu'opposent certains terrains mathématiques concrets, à cette intelligibilité.

Cette approche philosophique nous semble respectueuse des récits que nous livrent les mathématiciens de leurs propres pratiques. On s'en convaincra aisément en relisant le célèbre « Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique » de J. Hadamard (1945) et plus particulièrement le passage bien connu concernant la découverte des fonctions Fuchsiennes par Poincaré. On pourrait encore citer, à l'appui de cette esquisse d'une philosophie des mathématiques profondes, de nombreux témoignages de mathématiciens. Nous ne retiendrons que celui d'Henri Cartan (*in* M. Schmidt, 1990) qui déclarait en 1977, lors de la remise de la Médaille d'or du C.N.R.S. : « Le mathématicien sent plus ou moins confusément qu'il est à la recherche d'une réalité cachée qui refuse de se dévoiler du premier coup (...). Cette réalité que nous poursuivons, elle est pour le mathématicien le *monde réel* auquel il se trouve confronté et dont il n'est pas le maître. »

Avec ce dernier témoignage, nous touchons en fait les racines philosophiques les plus fondamentales des mathématiques profondes. Nous avions décrit ces dernières, dans un contexte platonicien, comme un terrain concret où s'incarnait la genèse d'un système stable de cohérence et où s'expérimentait la résistance de ce qui est l'Autre de la cohérence. Or, il faut bien avouer qu'une telle description bipolaire (la cohérence-son Autre) ne peut être satisfaisante sans une articulation effective entre les deux pôles. Cette articulation apparaît immédiatement lorsque, prenant du recul, on prend conscience que la « cohérence stable » et cette « résistance » sont en fait les indices concrets (pour-nous) de l'Idée de réalité. Aussi étendue que puisse être une investigation relative aux critères qui définissent un « élément de réalité » dans les sciences empirico-formelles, nous retrouvons toujours les caractéristiques suivantes : cohérence (insertion adéquate dans un système préexistant), stabilité (résistance aux « perturbations »), résistance (contrainte, étonnement, obstacles, ...). Les mathématiques profondes reflètent donc radicalement l'Idée de réalité. Cela n'est certes pas sans importance, car ce faisant, elles nous conduisent au seuil d'un domaine où s'estompe la pertinence d'une différence stricte entre mathématiques et sciences empirico-formelles.

4. Mathématiques profondes et physique... L'émergence d'un système

Le détour philosophique de la section précédente nous a suggéré une participation effective des mathématiques profondes (et non de toutes les mathématiques!) à l'Idée de réalité. Or il est clair que toutes les sciences empiriques, et la physique plus que tout autre, incarnent cette Idée dans leurs dynamiques propres. Le réel c'est cette « forme » cohérente du signal que l'on extrait d'un bruit de fond et qui persiste lorsqu'on change de techniques d'expérimentation. Le réel, c'est ce « pic » qui apparaît là où il ne devrait pas sur l'écran du spectomètre et qui contraint à réviser les schémas explicatifs. Il est étonnant de constater que, d'une part, cette Idée de réalité est en tout point similaire à celle que nous avons évoquée au sujet des mathématiques profondes, mais que d'autre part, ce sont précisément ces mathématiques-là qui s'adaptent, de manière prodigieusement adéquate, à la « réalité » que le physicien met en évidence dans un processus expérimental. Il suffit de rappeler que les techniques mathématiques de la théorie quantique des champs (QED) permettent de rendre compte des résultats empiriques jusqu'à la douzième décimale! Sur les lieux concrets de leurs pratiques, les physiciens peuvent légitimement risquer la *conjoncture* suivante : « la réalité des mathématiques profondes et celle de la physique ne font qu'une ». Nous retrouvons ici une puissante réflexion de Penrose (1989) qui pourrait également résumer la transition entre cette section et la précédente : "... some mathematical truths seem to have a stronger Platonic reality than others. These would be more strongly to be identify with the workings of physical reality."

Parvenu à ce stade de notre réflexion, il serait possible de reprendre la problématique de l'Idée de réalité en concentrant son attention sur les pratiques expérimentales. Nous pourrions montrer que dans ce domaine on peut distinguer des « *phénomènes plus profonds que d'autres* ». Ceux-ci se caractériseraient également par une « capacité générative » (ils sont la base de développement d'appareils, de technologies qui vont féconder des champs empiriques variés) par une « stabilité » (résistance à toute stratégie visant à les éliminer ou persistance sous changement de technique propre à les analyser) et par une « résistance » (qui provoque d'ailleurs souvent l'étonnement : pensons à la découverte de la radioactivité par exemple). Les phénomènes non-profonds sont ceux qui, par contre, s'évanouissent en bruits de fonds ou qui se révèlent être de purs artefacts d'un appareil déterminé... ou encore qui sont purement et simplement le produit de la conviction de l'expérimentateur (pensons aux célèbres rayons N de Blondlot, *Cf*. Thuillier, 1980). Étape par étape, nous pouvons suivre la manière dont les phénomènes profonds nous sont donnés. Or, ce qui est surprenant, c'est l'étroite connivence des techniques mathématiques profondes et de la mise en évidence de phénomènes profonds. Pour ne citer qu'un exemple, évoquons la transformée de Fourier. D'une part, il ne fait aucun doute qu'une telle transformée peut être considérée comme un objet mathématique profond (elle a engendré toute une discipline : l'analyse harmonique). D'autre part, elle joue un rôle central dans l'extraction de signaux mêlés dans un bruit de fond ou pour comprendre la structure d'entités physiques analysées par une méthode d'interaction (diffraction de rayons X, par exemple). Après sa mise en évidence, nous pouvons investiguer les cadres formels qui permettent de comprendre le phénomène profond. Dans ce cas, nous retrouvons sans peine des structures mathématiques profondes.

La physique et les mathématiques se rencontrent donc sur un terrain commun : les mathématiques profondes. Celles-ci loin d'être réduites au statut d'outils peuvent être vues comme le lieu concret où s'inscrit, s'incarne l'Idée de réalité. C'est donc cette Idée qui, donnant toute sa consistance au terrain commun dont nous parlions plus haut, constitue l'articulation de deux ensembles de pratiques épistémiques et donne sens à un système dynamique de connaissances. Au niveau des mathématiques profondes, il n'y a plus de physique ou de mathématiques, il y a une physique-mathématique, qu'il serait équivalent de qualifier de mathématique-physique. (Flato, 1990).

La physique et les mathématiques nous offrent un bel exemple d'émergence d'un système de connaissances mises en interaction grâce à un terrain commun qui trouve sa consistance propre comme manifestation concrète de l'Idée de réalité. Le système fait donc signe au-delà de lui-même à ce qui en constitue le principe fondateur. L'analyse du concept de système de connaissances se trouve donc à l'étroit si on la confine à la seule épistémologie. Sa dynamique propre contraint la réflexion à se replonger au cœur d'une interrogation proprement méta-physique. Le recours à Platon doit être compris en ce sens, mais ne saurait être absolutisé. Chaque système de connaissances puisera dans le corpus d'intuitions métaphysiques les éléments qui lui sont adéquats.

5. Discussion : limites et portée du platonisme

Le but de cette section conclusive vise à éclairer le recours à une philosophie d'inspiration platonicienne pour étudier les mathématiques dites « profondes » et leurs liens avec la physique. Ce recours suscite de fait les questions suivantes : (i) ne peut-on intégrer la problématique des mathématiques profondes dans une philosophie non platonicienne tout en respectant leur richesse propre ? Dans ce cas, le recours au platonisme ne relève plus d'une nécessité rationnelle mais bien plus d'une option, d'un engagement métaphysique.

(ii) Une philosophie empiriste peut-elle justifier le succès des mathématiques profondes en physique ? Ou, pour l'exprimer autrement, ces mathématiques sont-elles fécondes en physique parce qu'elles résultent précisément d'idéalisations ou de généralisations obtenues à partir de structures empiriques ?

(iii) Qu'en est-il du statut philosophique des Idées platoniciennes dont nous faisons usage ? Ce monde d'Idées mathématiques ne pose-t-il pas plus de problèmes qu'il n'en résout ?

Pour répondre à la question (i) évoquons brièvement les conceptions philosophiques non platoniciennes des mathématiques. Tout d'abord le « formalisme ». Suivant cette philosophie, les mathématiques sont constituées de constructions formelles obtenues à partir d'un ensemble d'axiomes et de règles d'inférence. Les mathématiques sont ainsi inventées (et non découvertes !) tout comme on invente des jeux de sociétés en en produisant arbitrairement les règles de base. Évoquons ensuite le « constructivisme ». Cette philosophie ne confère un sens qu'aux objets mathématiques construits effectivement (et donc en un nombre fini de pas !). Ces deux philosophies permettent de décrire plus ou moins adéquatement l'activité du mathématicien (même si la dernière est très réductrice puisqu'elle élimine l'idée d'infini ...). Pourtant aucune d'elles n'aborde la question de savoir pourquoi les mathématiciens suivent telle voie plutôt qu'une autre, s'accrochent à tel système d'axiomes ou de formules (comme celle qui fût à la base de la topologie algébrique : la formule d'Euler-Poincaré) plutôt qu'à tel autre, pourquoi une théorie fut féconde et non telle autre ? Ces philosophies sont descriptives mais non explicatives du dynamisme des mathématiques. La philosophie platonicienne, non seulement offre une description du paysage mathématique, mais explique pourquoi l'évolution de celui-ci se produit de telle manière : les mathématiques profondes (génératives ...) se développent de telle sorte qu'elles « incarnent » certaines Idées. Nous devons avouer que la difficulté fondamentale de la philosophie des mathématiques est maintenant reportée sur le statut des Idées (question (iii)) mais c'est précisément l'avantage d'une philosophie platonicienne que de risquer une « explication » alors que les autres se cantonnent au niveau « descriptif ». L'option platonicienne n'est donc pas purement arbitraire : elle résulte de l'élimination de cadres philosophiques qui n'offrent pas d'explication au dynamisme des mathématiques profondes. Cette option n'est pourtant pas strictement nécessaire. En effet, rien ne dit que l'explication platonicienne soit la seule possible ! Mais que sont les autres ? Explications biologiques (changeux), naturalistes (sélection « naturelle » des théories ...), ... Malheureusement aucune de ces dernières n'ont fait, jusqu'à ce jour, l'objet de développements pouvant rivaliser avec celles issues de la philosophie des mathématiques d'inspiration platonicienne.

La réponse à la question (ii) s'éclaire par la remarque suivante. L'histoire des mathématiques montre que la fécondité propre à certaines théories est le plus souvent reconnue bien avant tout application à un domaine empirique. La géométrie différentielle, le calcul différentiel absolu (analyse tensorielle) issus des travaux de Riemann, Ricci, Levi-Civita,... avaient presqu'un siècle de féconds développements avant que Grossmann et Einstein ne les aient appliqués à la relativité générale. La toute récente application de la théorie des nœuds à la mécanique statistique fait appel à une riche discipline dont l'origine remonte à Kelvin... Il y a donc souvent – et de plus en plus, si l'on considère l'histoire contemporaine des rapports entre physique et mathématiques – une priorité des mathématiques profondes par rapport aux situations empiriques. On pourrait fournir, à ce stade, des exemples qui semblent infirmer cette thèse. Qu'en est-il, par exemple, de la théorie des distributions? Celle-ci a été motivée par les travaux d'électriciens (Heaviside) ou de physiciens (Dirac). Si on y regarde de près, on se rend compte que cette théorie, systématisée par Schwartz, est un fruit naturel de l'analyse fonctionnelle (une distribution est un élément du dual d'un espace de fonctions) dont la fécondité était reconnue bien avant Heaviside (l'idée de fonctionnelle, par exemple, est issue de « vieux » travaux en calcul des variations, surfaces minimales,...). Une théorie mathématique n'est donc pas reconnue comme féconde ou profonde du fait de ses applications ou parce qu'elle est induite de structures empiriques. Comme l'a souvent remarqué Einstein, face à l'infinie complexité des résultats d'expériences, il est à peu près impossible de « deviner » le cadre mathématique adéquat (par exemple : de l'avance du périhélie de Mercure, induire les équations de la relativité générale!). Il faut donc partir des mathématiques (reconnues comme fécondes). Comment expliquer l'efficacité insolente de ces dernières dans des prédictions expérimentales? Ici, le platonisme offre une réponse directe. Vu que la position empiriste a été rejetée ci-dessus et qu'aucun autre cadre philosophique (sauf une espèce de monisme à la Spinoza?) ne permet une explication aussi immédiate de la réussite des mathématiques en physique, nous voici conduit au seul platonisme.

Il est clair que cette solution, bien que directe, pose énormément de questions. Peu de philosophes des mathématiques ont clairement analysé la problématique du statut des Idées (question (iii)). Nous pensons que le recours à ces dernières ne peut être compris en les hypostasiant. Les Idées et leurs incarnations par l'action démiurgique doivent s'appréhender en tant que métaphores. Elles symbolisent la possibilité d'une similitude entre les

structures profondes de notre rationalité et celles du Cosmos tout en préservant la distinction esprit-Nature. Le platonisme offre donc métaphoriquement la possibilité de penser l'intelligibilité du Cosmos en évitant un monisme biffant les différences fondamentales, un réalisme plat qui ne donne plus de place au Cogito et un idéalisme radical qui enferme le sujet dans une cohérence fermée sur elle-même (solipsisme).

L'option platonicienne de cet article est donc une invitation à penser plutôt qu'un point final clôturant un débat. La philosophie des mathématiques et de la physique doit, à notre avis, susciter une réflexion qui, refusant un platonisme naïf, mais s'inspirant de la métaphore platonicienne, peut renouveler la question de l'intelligibilité étonnante de la Nature.

Références

S. BOCHNER, Harmonic Surfaces in Riemannian Metric, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 47, 1940, p. 146.

J. P. CHANGEUX & A. CONNES, Matière à pensée, Paris, Odile Jacob, 1989.

W. K. CLIFFORD, Preliminary Sketch of Biquarternions, *Proc. L.M.S.*, 4, 1983.

A. CONNES, Géométrie non-commutative, Paris, InterÉditions, 1990.

A. CRUMEYROLLE, Orthogonal and Symplectic Clifford Algebras: Spinor Structures, Kluwer Academic Publishers, Dodrecht, 1990.

J. DIEUDONNE, Cours de géométrie algébrique 1., 2., Paris, P.U.F., 1974.

J. DIEUDONNE, Panorama des mathématiques pures : Le choix bourbachique, Paris, Gauthier-Villars, 1977.

J. DIEUDONNE, Mathématiques vides et mathématiques significatives, in *Penser les Mathématiques*, (J. DIEUDONNE, M. LOI & R. THOM), Paris Ed. du Seuil, 1982.

J. DIEUDONNE, Pour l'honneur de l'esprit humain : Les mathématiques aujourd'hui, Paris, Hachette, 1987.

L. E. DICKSON, On Quaternions and their Generalization and the history of the Eight Square theorem, *Ann. Math.*, 20, 1919, p. 155.

J. EELS & L. LEMAIRE, A Report on Harmonic Maps, *Bull. London Math. Soc.*, 10, 1978, 1.

J. EELS & L. LEMAIRE, Another Report on Harmonic Maps, *Bull. London Math. Soc.*, 20, 1988, p. 385.

M. FLATO, Le pouvoir des mathématiques, Paris, Hachette, 1990.

F. GRAMAIN, Les nombres transcendants, in *Les mathématiques aujourd'hui*, Paris, Pour la science, Belin, 1984.

J. HADAMARD, Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique, Paris, Blanchard, 1959.

A. HURWITZ, Uber die komposition der Quadratischen Formen von beliebig vielen Variabeln, Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Gottingen Mathematisch-Physikalische Klasse, 1898, p. 309-316.

M. LAURENTIEV & B. CHABAT, Effets hydrodynamiques et modèles mathématiques, Moscou, M.I.R., 1980.

A. LAUTMAN, Essai sur les notions de structure et d'existence en Mathématiques, Paris, Blanchard, 1959.

M. LOI, in Essai sur l'unité des mathématiques et divers écrits par Albert Lautman, Paris, Union Générale d'Editions, 1977.

C. W. MISNER, Harmonic Map as models for Physical Theories, *Phys. Rev.*, D18, 1978.

R. PENROSE, The Emperor's New Mind: Concerning Computers, Minds and the Laws of Physics, Oxford, Oxford University Press, 1989.

PLATON, Œuvres complètes (trad. L. Robin), Pleiade, Paris, N.R.F., 1950.

L. S. RANDRIAMIHAMISON, Paires de Hurwitz pseudo-euclidiennes en signature quelconque, *J. Phys. A. : Math. Gen.*, 23, 1990, p. 2729-2749.

P. RICŒUR, Platon et Aristote, Strasbourg, Centre de documentation universitaire, 1954.

P. SENN, The Mandelbrot set for binary numbers, *Am. J. Phys.*, 58, 1990, p. 1098.

M. SCHMIDT, Hommes de science 28 portraits, Paris, Hermann, 1990.

P. THUILLIER, La triste histoire des Rayons N., in *Le petit savant illustré*, Paris, Seuil, 1980.

PETITE PHÉNOMÉNOLOGIE DE LA CONNAISSANCE (*)

André PICHOT

Cette « petite phénoménologie de la connaissance » (proposée par un lauréat du prix Pascal du Collège de systémique de l'AFCET) ne peut laisser indifférent. Il s'agit en effet d'une tentative originale de conceptualiser de manière interdépendante des notions aussi fondamentales que *vivre* et *penser* (trous noirs de notre connaissance) sous-tendant nos recherches depuis le « connais-toi toi-même » socratique jusqu'aux démarches les plus actuelles de la biologie ou de la psychologie...

Dans le cadre proposé par l'auteur, ces disciplines se voient assigner une approche systémique de ces notions :

– la biologie, science de la spécificité de l'être vivant, doit étudier l'activité auto-constitutive de ce dernier. La vie est en effet conceptualisée en termes de *disjonction* entre l'évolution de l'être vivant et celle de son environnement : « l'être vivant se constitue en entité distincte de ce qui devient ainsi son milieu extérieur » (il est clair, en effet, que la mort – étant donné le cycle de l'azote – met fin à une telle disjonction).

– la psychologie, de façon très parallèle à la biologie, doit « étudier comment le sujet se pense comme un objet distinct, mais relié aux objets qui ne sont pas lui ». Reste à préciser l'*objet* en lequel se constitue ainsi ce sujet qui pense (l'homme) : constitution récursive, produisant un corps-objet, un sujet-qui-se-pense-comme-objet, et non seulement comme un centre d'organisation de son action.

Vivre et penser, ou encore existence et signification, sont interdépendants. En particulier, la *signification* d'un objet est fonction de l'action qui fait apparaître cet objet au sujet (et qui fait apparaître ce sujet à lui-même); cette signification ne se conçoit ainsi ni comme objective ni comme subjective, mais comme une modalité d'*existence* pour le sujet.

L'essai comporte deux parties : *le corps* (et la constitution de ce corps dans la spatialité), et *l'oubli du corps* (avec la conscience linguistique, sous-produit de la conscience spatiale). L'auteur nous raconte (avec son talent qui participe à la fois du scientifique et du littéraire) l'arbre de la connaissance, avec ses fruits discursifs, et son enracinement dans la vie. Il laisse entrevoir quelques-unes des forêts (touffues) qui se cachent derrière cet arbre, notamment celles des traditions bibliques ou helléniques.

E. Andreewsky

(*) Aubier, 1991.