

Revue Internationale de

ISSN 0980-1472

systemique

Vol. 7, N° 4, 1993

afcet

DUNOD

AFSCET

Revue Internationale de
systemique

Revue
Internationale
de Sytémique

volume 07, numéro 4, pages 419 - 445, 1993

Les modèles proies-prédateurs ;
rapports avec les attracteurs étranges

Patrick Sylvestre-Baron

Numérisation Afscet, août 2017.



Creative Commons

- P. JEAMMET, *L'anorexie mentale*, Paris, Doin, 1985.
- E. KESTEMBERG, J. KESTEMBERG & E. DECOBERT, *La faim et le corps*, Paris, P.U.F., 1983.
- Y. LACAMP, *Une jeune fille bien comme il faut*, Paris, Albin Michel, 1991.
- R. G. LAESSLE, S. SITTL, M. M. FICHTER, H. U. WITTCHEM & D. M. PIRKE, Major affective disorder in anorexia nervosa and bulimia, *British Journal of Psychiatry*, 151, 1987, p. 785-789.
- M. MACKENZIE, *The pursuit of slenderness and addiction to self control*, Nutrition update, vol. 2, 1985, p. 173-194.
- S. MACLEOD, *Anorexique*, Paris, Aubier Montaigne, 1982.
- S. MINUCHIN, B. L. ROSMAN, L. BAKER, *Psychosomatic Familiars*, Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1982.
- D. W. SCOTT, Alcohol and food abuse : some comparisons, *British Journal of Addiction*, 78, 1983, p. 339-349.
- G. L. SMUKLER & D. TANTAM, Anorexia Nervosa : starvation dependence, *British Journal of Medical Psychology*, 57, 1984, p. 303-310.
- A. B. VEIRA, An Etho-Ecological theory of anorexia nervosa, *Acta psychiatrica Portuguesa*, vol. 29, 1983, p. 45-58.
- P. WILLIAMS & M. KING, The epidemic of anorexia nervosa : another medical myth ? *The Lancet*, 24, 1987, p. 205-207.

ENSEIGNEMENT DE LA SYSTÉMIQUE

LES MODÈLES PROIES/PRÉDATEURS. RAPPORTS AVEC LES ATTRACTEURS ÉTRANGES

Patrick SYLVESTRE-BARON ¹

Résumé

Dans ce bref article nous étudions deux modèles dynamiques simples de type « proies-prédateurs », dans l'optique de la dynamique des systèmes, en nous intéressant à la stabilité des variables d'état de ces micro-systèmes. Cela étant nous proposons un programme informatique élémentaire en BASIC permettant d'obtenir un tracé écran de ce qui peut être considéré comme un attracteur étrange représentatif du comportement dynamique du système étudié.

Abstract

In this short paper we are studying two basic preys-predators models, from the point of view of the system dynamics, seeking the stability of the state variables of these micro-systems. Then we propose a simple BASIC computer programme allowing us to obtain a screen plot of what it is to be thought as a so called strange attractor which illustrates the dynamic behaviour of the system under consideration.

Dans son ouvrage « *Study notes in Systems Dynamics* » Michael R. Goodman présente un modèle proies-prédateurs relativement évolué, le modèle « Plateau du Kaïbab ». Ce modèle retrace l'évolution d'une population de daims sur le plateau du Kaïbab (États-Unis), suite à une perturbation du système écologique introduite par l'offre d'une prime à l'abattage des prédateurs de ces daims (loups, cougars, coyotes). Nous voudrions montrer ici qu'il existe des modèles fondamentaux plus simples

1. Laboratoire d'Économie et de Statistique Appliquées. Groupe DELSIG Δ₂. Faculté de Sciences Économiques et de Gestion. Université Lumière Lyon-II, 16, quai Claude-Bernard, 69365 Lyon Cedex 07.

dits « modèles proies-prédateurs ». Ce type de modèle peut être utilisé, par analogie, en économie pour simuler, par exemple, la compétition de deux entreprises sur un même marché ou bien pour élaborer des modèles de diffusion de technologies. Nous profiterons de cet exposé pour faire la jonction avec ce que l'on appelle les attracteurs étranges.

I. LE MODÈLE PROPRIÉ, BICHES/LOUPS

I.1. Le modèle

Le modèle décrit en premier est le plus simple possible. Il comporte une proie, des « biches » (B) et un prédateur, des « loups » (L). Le diagramme de flux de ce modèle est le suivant

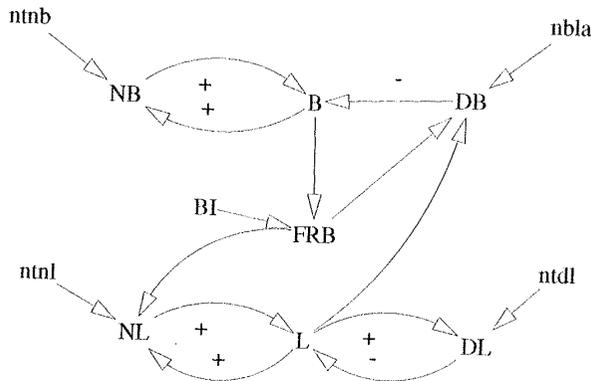


Figure 1. Diagramme de flux du modèle PROPRIÉ

Les équations de dynamique des systèmes qui lui sont associées sont données ci-après. A la suite de chaque équation nous donnons la signification des variables avec leur dimension.

$$B = B + DT * (NB - DB) \quad L$$

$$B = 4\ 000 \quad N$$

B : Biches (b)

NB : Naissances de Biches (b/an)

DB : Décès de Biches (b/an)

$$NB = B * NTN B \quad R$$

$$NTNB = 1/5 \quad C$$

NTNB : Norme Taux de Naissance de Biches (fraction/an)

$$DB = L * FRB * NBLA \quad R$$

$$NBLA = 1/10 \quad C$$

L : Loups (l)

FRB : Fraction Restante de Biches (%)

NBLA : Nombre de Biches par Loup par an (b/l-an)

$$FRB = B/BI \quad A$$

$$BI = 4\ 000 \quad C$$

BI : Biches Initiales (b)

$$L = L + DT * (NL - DL) \quad L$$

$$L = 8\ 000 \quad N$$

NL : Naissances de Loups (l/an)

DL : Décès de Loups (l/an)

$$NL = L * FRB * NTN L \quad R$$

$$NTNL = 1/10 \quad C$$

NTNL : Norme Taux de Naissance de Loups (fraction/an)

$$DL = L * NTDL \quad R$$

$$NTDL = 1/30 \quad C$$

NTDL : Norme Taux de Décès de Loups (fraction/an)

On notera que la liaison entre la ligne de flux « Biches » et la ligne de flux « Loups » est réalisée d'une part à l'aide de la variable auxiliaire FRB qui, à tout instant, nous donne le rapport existant entre le niveau de Biches existant et le niveau de Biches initial, et sert à moduler les variables d'action NL et DB. D'autre part à l'aide de la variable d'action DB fonction de la variable d'état L.

Compte tenu de ces données on peut réaliser une simulation de base avec un « pas de calcul » DT égal à 0,5, un « pas d'impression » DI égal à 2 et un paramètre « longueur de la simulation » LG égal à 200. Ces trois paramètres sont exprimés dans l'unité de temps du système modélisé. On obtient : Min (B) = 128, Max (B) = 5 222, Min (L) = 3 655, Max (L) = 15 557. (NB, ces valeurs peuvent légèrement varier selon le logiciel employé pour la simulation.) Le graphique temporel suivant montre bien les « oscillations » des deux populations.

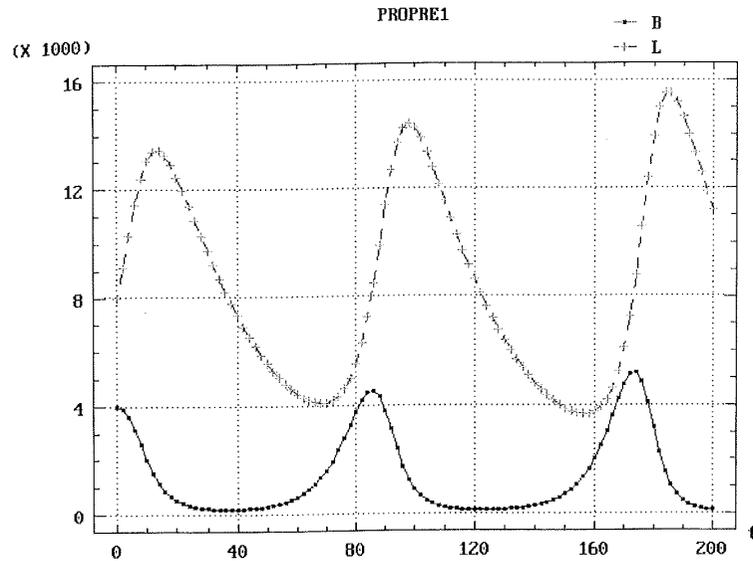


Figure 2. Graphique temporel des variables d'état de PROPRI

Si l'on transforme les équations de niveaux « réduites » (équations de niveaux dans lesquelles on porte les valeurs des variables d'action) en équations différentielles, on retrouve en fait les équations dites de « Lotka et Volterra » (1920 et 1931). En effet posons $NTNB=A1$, $NBLA=A2$, $NTNL=A3$, $NTDL=A4$, les équations de niveau réduites s'écrivent

$$B = B + DT * (A1 * B - A2 * (B * L) / BI)$$

$$L = L + DT * (A3 * (L * B) / BI - L * A4)$$

soit en termes d'équations différentielles

$$dB/dt = A1 * B - A2 * (B * L) / BI$$

$$dL/dt = A3 * (B * L) / BI - A4 * L$$

Si l'on note N_1 et N_2 les deux variables d'état des équations de Lotka Volterra, celles-ci sont décrites par le système d'équations différentielles

$$dN_1/dt = a_1 N_1 - b_1 N_1 N_2$$

$$dN_2/dt = -a_2 N_2 + b_2 N_1 N_2$$

d'où par identification :

$$a_1 = A1 \quad b_1 = A2/BI \quad a_2 = A4 \quad b_2 = A3/BI$$

Ces équations ne possèdent pas de solutions analytiques connues. On peut cependant faire une étude analytique de leurs points singuliers (Cunningham, 1963). Par ailleurs on a montré que les solutions sont au moins qualitativement correctes en ce sens que N_1 (B) et N_2 (L) sont oscillants, en ayant la même période avec un déphasage.

1.2. Stabilité du modèle

Les niveaux B et L sont des variables d'état. Pour ce type de variables on peut représenter leur comportement par une fonction dans le temps $B(t)=f(t)$, $L(t)=g(t)$, comme nous l'avons fait ci-dessus. Mais on peut aussi se placer dans « l'espace des phases » (ou espace des états). C'est l'espace dans lequel toutes les variables d'état (d'un système) sont représentées, à un moment donné, par un point. Dans le cas présent cet espace des phases est à deux dimensions (B et L), on peut l'assimiler au plan \mathbb{R}^2 . En outre on note que la trajectoire d'un point dans l'espace des phases ne doit jamais repasser par un même « point ». De fait un point de cet espace représente l'état d'un système et caractérise toutes les informations disponibles sur ce système à un moment donné. Dès lors il ne peut exister deux chemins différents partant d'un seul et même point.

Les oscillations prévues par les équations de Lotka Volterra sont « instables » en ce sens que presque n'importe quelle perturbation réaliste du système, introduite par l'adjonction d'une nouvelle variable, doit conduire à un amortissement des oscillations, comme on le verra dans la deuxième partie. Cela étant si on trace les points B(t), L(t) dans un diagramme de phase plan (en l'absence de perturbation) les solutions des équations de Lotka Volterra apparaissent comme des trajectoires autour d'un point central (un « vortex »). Nous donnons ci-après le diagramme de phase obtenu sur les 200 premiers points, ainsi qu'un diagramme de phase « particulier » obtenu avec le programme « ATRACPRO » (figurant en annexe) portant sur 1 000 points, avec un pas d'échantillonnage de 4. Nous reviendrons ultérieurement sur ce programme ATRACPRO et sur son utilité. On notera que, compte tenu des valeurs paramétriques prises ici, notre système tend à devenir « explosif », comme le montre la forme en « colimaçon se déroulant vers l'extérieur » à partir du point originel de coordonnées (4 000, 8 000), dans le diagramme de phase (B, L). Par contre cela n'est pas évident sur le diagramme de phase dû à ATRACPRO. Nous expliquerons cette contradiction « apparente » par la suite.

PROPRE1 Diagramme de phase B/L

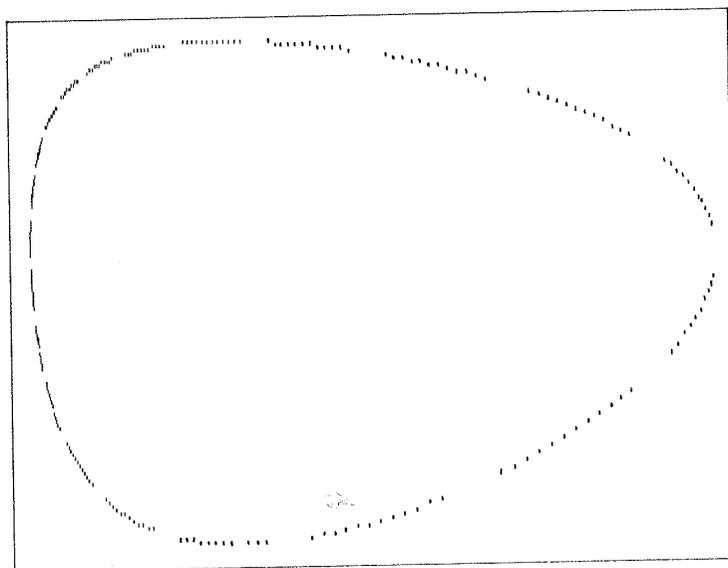
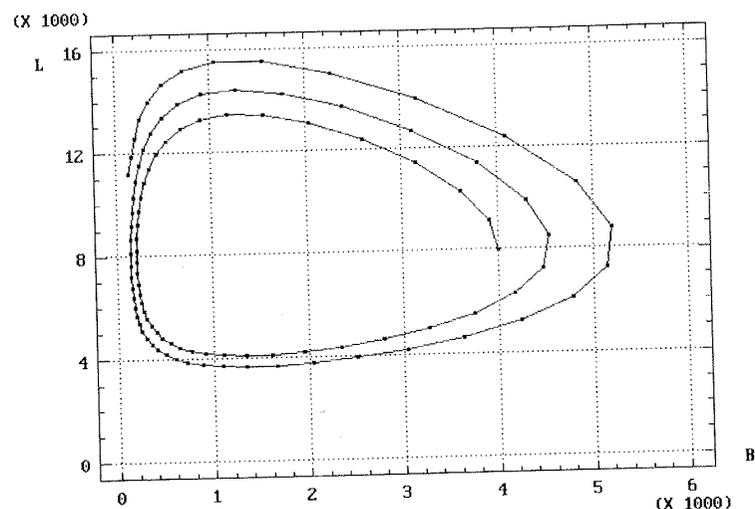


Figure 3 et Figure 4. Diagramme de phase usuel sur 200 points
et diagramme de phase sur 1 000 points (ATRACPRO)

II. LE MODÈLE PROPRE2, NOURRITURE/BICHES/LOUPS

II.1. Stabilité du modèle

Dans le modèle PROPRE1 on peut introduire un « terme de Verhulst » (une sorte de loi des rendements décroissants) dans l'expression de la croissance des proies (compte non tenu des prédateurs). Les oscillations sont alors amorties. Ce terme de Verhulst peut être considéré comme une troisième variable d'état, c'est la nourriture des proies (facteur qui tend à borner la croissance des proies) [Cf. la courbe en S de la loi de Verhulst ou courbe logistique].

Sous cette forme le système initial est perturbé (par l'adjonction du terme de Verhulst). La nourriture peut être considérée comme une « troisième espèce » dans ce qu'on appelle les équations de Lotka Volterra généralisées sous la forme

$$dN_i/dt = a_i N_i - \sum_j b_{ij} N_i N_j \quad \text{où } b_{ii} = 0$$

On parle alors de système à *comportement turbulent*. Or tous les systèmes à comportement turbulent sont *dissipatifs*, ils dissipent ou dégradent de l'énergie à partir d'une forme très utilisable (par exemple, l'énergie électrique) en une forme moins utilisable (par exemple, l'énergie thermique). Ce sont des systèmes dans lesquels tout mouvement s'atténue avec le temps et tend vers une position de repos. Les quelques positions de repos possibles sont appelées des équilibres. Dans les systèmes physiques, les frottements (qui ont leur équivalent abstrait dans le cas d'autres systèmes, comme ici) opèrent en dissipant l'énergie sous forme de chaleur. Quand $E_c = 0$, le mouvement s'arrête en une position d'équilibre, d'où le nom de système dissipatif (Cf., Ekland, 1984).

Notre système B/L/N est un système dissipatif, *sous certaines conditions paramétriques*. Le diagramme de flux associé au nouveau modèle, obtenu après adjonction d'un niveau de Nourriture (N), est donné ci-après.

On a alors les équations supplémentaires suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{N} &= N + DT * (GN - CN) & L \\ \dot{N} &= 35\,000 & N \end{aligned}$$

N : Nourriture (unités de n)

GN : Génération de Nourriture (u de n/an)

CN : Consommation de Nourriture (u de n/an)

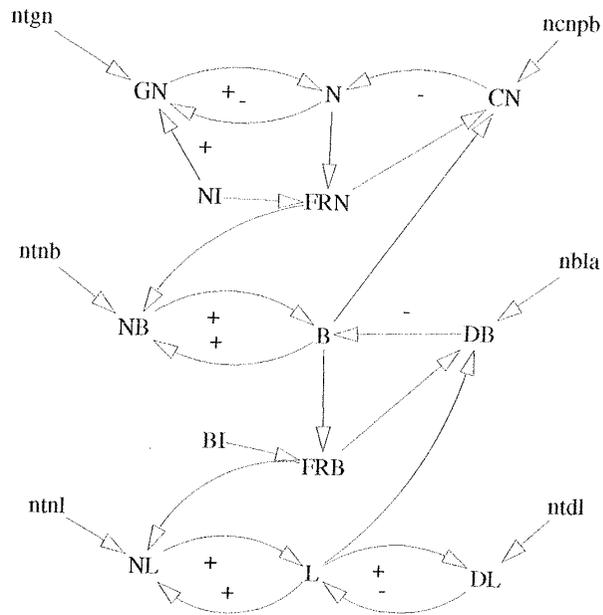


Figure 5. Diagramme de flux du modèle PROPRES2

$$GN = (NI - N) * NTGN \quad R$$

$$NTGN = 1/4 \quad C$$

$$NI = 35\ 000 \quad C$$

NI : Nourriture Initiale (u de n)

NTGN : Norme Taux de Génération de Nourriture (fraction/an)

$$CN = B * FRN * NCNPB \quad R$$

$$NCNPB = 1/10 \quad C$$

FRN : Fraction Restante de Nourriture (sans dim.)

NCPB : Norme Consommation de N par B (u de n/biche-an)

$$FRN = N/NI \quad A$$

Attention : on doit modifier l'ancienne équation de NB en posant

$$NB = B * NTNB * FRN \quad R$$

Dans un premier temps, pour voir ce qu'il en est du système dissipatif on peut éliminer le flux de génération de nourriture dans les équations précédentes. De ce fait le système ne peut être que « freiné » par un stock de nourriture qui va en s'épuisant. On peut alors réaliser une première simulation de PROPRES2 [en fait on est dans un modèle PROPRES2Bis, où $N = N + DT * (-CN)$] en prenant initialement $N = 3\ 500$, d'où $NI = 3\ 500$, au lieu de 35 000, pour de simples raisons de longueur de calcul. On peut réaliser une simulation numérique avec $DT = 0,5/DI = 2/LG = 550$.

On observe alors la convergence de N vers 0 (atteint en $t = 365$), celle de L vers 0 (au-delà de $t = 550$), avec une faible oscillation et celle de B vers 558 ! (seuil atteint au-delà de $t = 550$) avec une oscillation marquée au cours des 200 premières années. Ces résultats quelque peu incohérents, puisqu'il existe encore des biches après toute disparition de nourriture, s'expliquent par les valeurs paramétriques choisies et par le fait que la variable d'état N ne joue pas sur la variable d'action DB. De fait les loups disparaissent avant les biches. Il n'y a alors plus de décès de biches, ni de naissances, et le niveau B se stabilise à la valeur atteinte à ce moment.

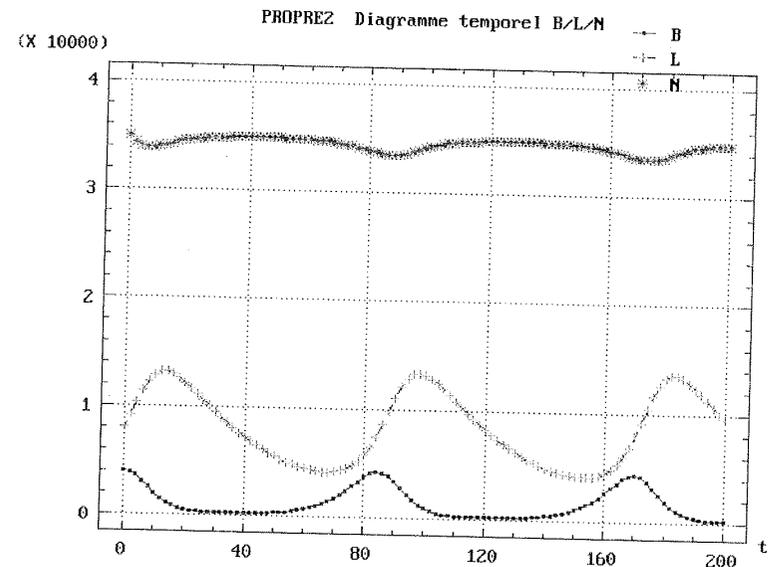


Figure 6. Graphe temporel de base de PROPRES2

Comme on le verra ci-après (Cf. *infra* 2.2 Stabilité du modèle et attracteurs étranges) on peut se demander si l'introduction du flux de Génération de Nourriture (GN) peut servir comme « entraîneur » au système dissipatif précédent. Si c'était le cas, le nouveau modèle (PROPRE2 en fait) devrait faire montre d'un comportement oscillant entretenu. Réintroduisons donc le terme GN en ses lieux et places.

Cela étant on peut réaliser une simulation en prenant $DT=0,5/DI=2$ et $LG=200$, on obtient alors les valeurs suivantes

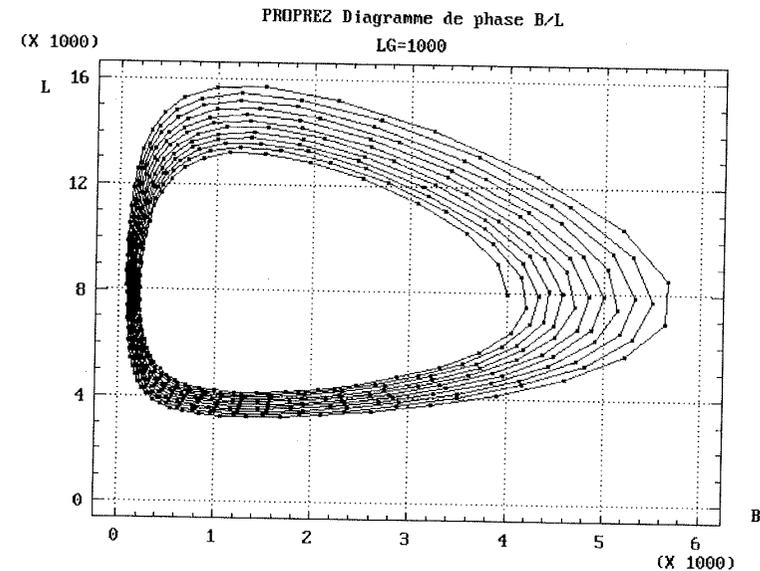
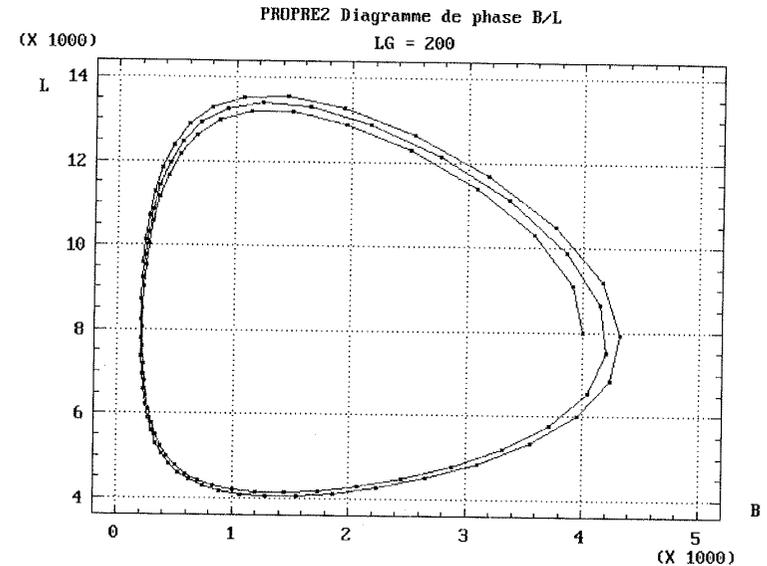
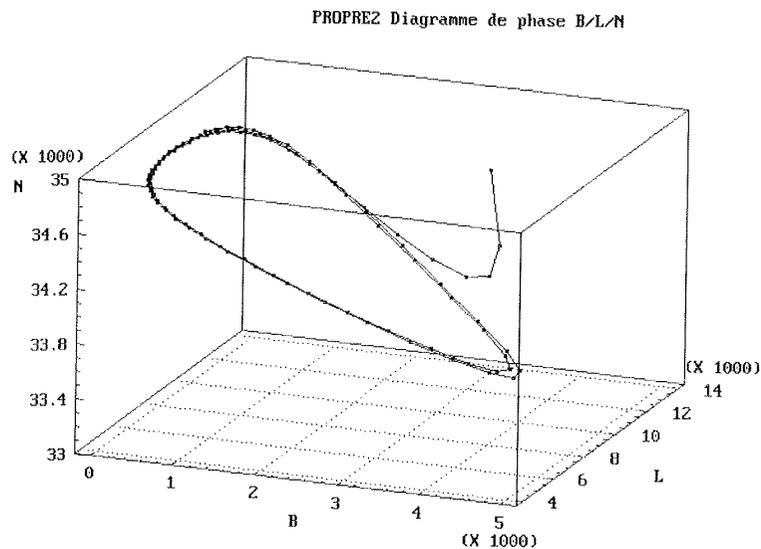
$$\begin{aligned} \text{Min}(B) &= 201, & \text{Max}(B) &= 4324 \\ \text{Min}(L) &= 4058, & \text{Max}(L) &= 13577 \\ \text{Min}(N) &= 33446, & \text{Max}(N) &= 35000 \end{aligned}$$

et le graphe temporel suivant (Cf. Figure 6).

Apparemment, au vu de ce graphe temporel on a des oscillations « entretenues ». On peut donc se poser des questions sur le caractère « dissipatif » du système modélisé.

II.2. Stabilité du modèle et « attracteurs étranges »

Comme nous l'avons dit antérieurement le système (B/L) perturbé avec son terme de Verhulst (N) doit faire montre d'un caractère dissipatif. Ce qui



Figures 7, 8 et 9. Diagrammes de phase de base du modèle PROPRE2

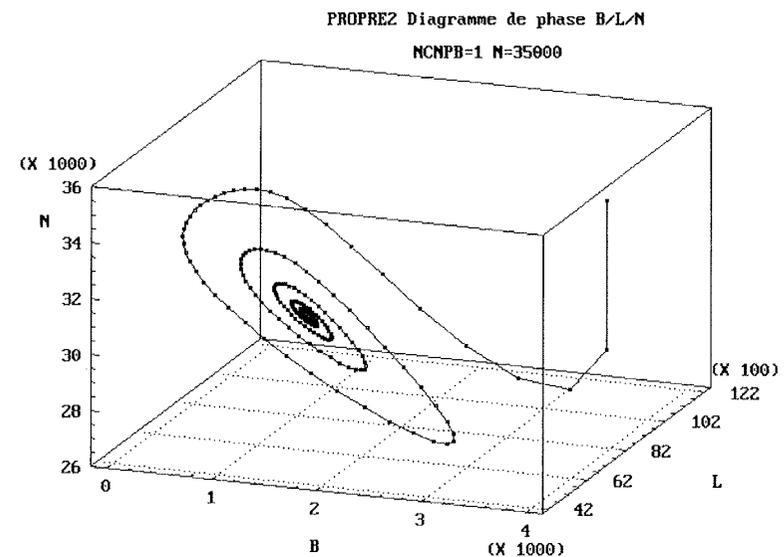
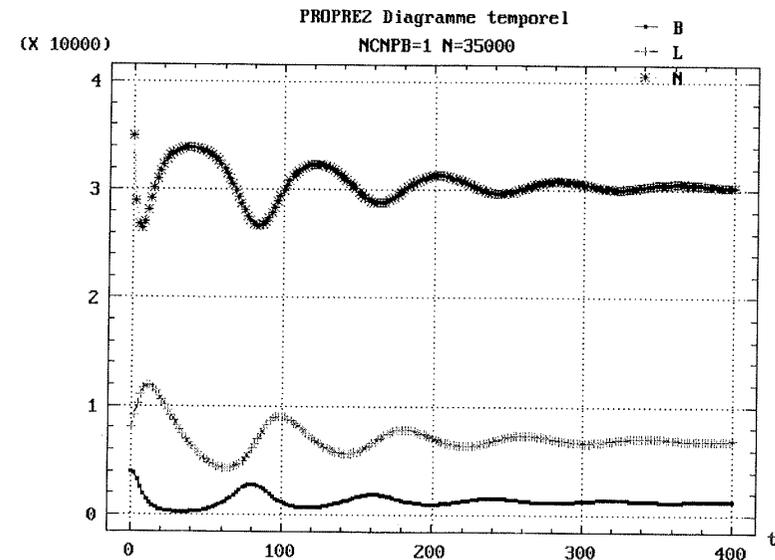
n'est guère évident pour le moment. On peut alors tracer les points $B(t)$, $L(t)$ et $N(t)$ dans l'espace des phases à 3 dimensions (on parle de diagramme d'espace des phases). Et pour faciliter la lecture de ce diagramme on peut en donner une « projection » dans le plan (B, L) . Cette projection est donnée pour $LG=200$ et $LG=1000$.

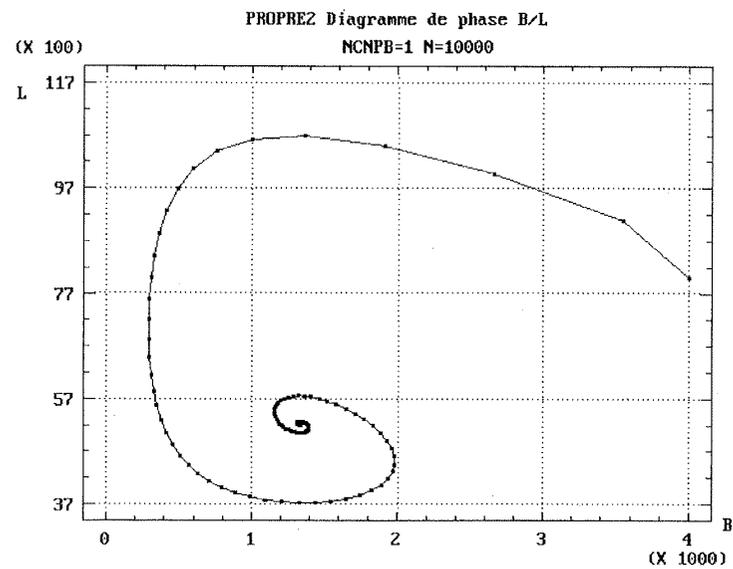
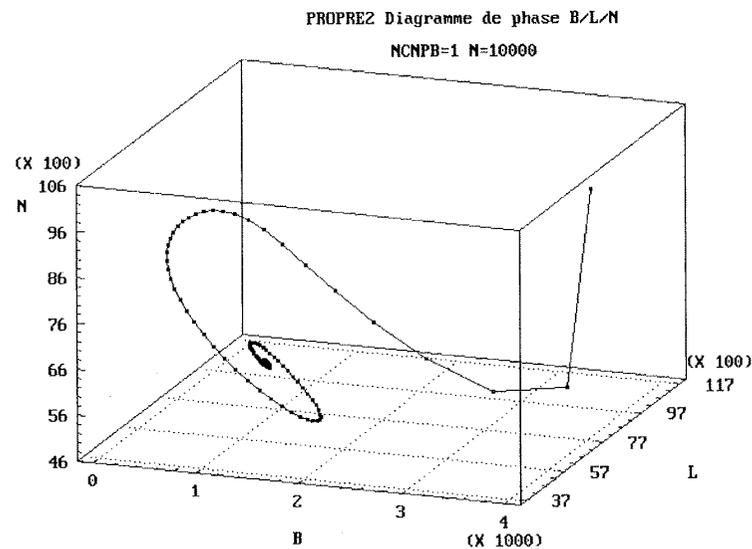
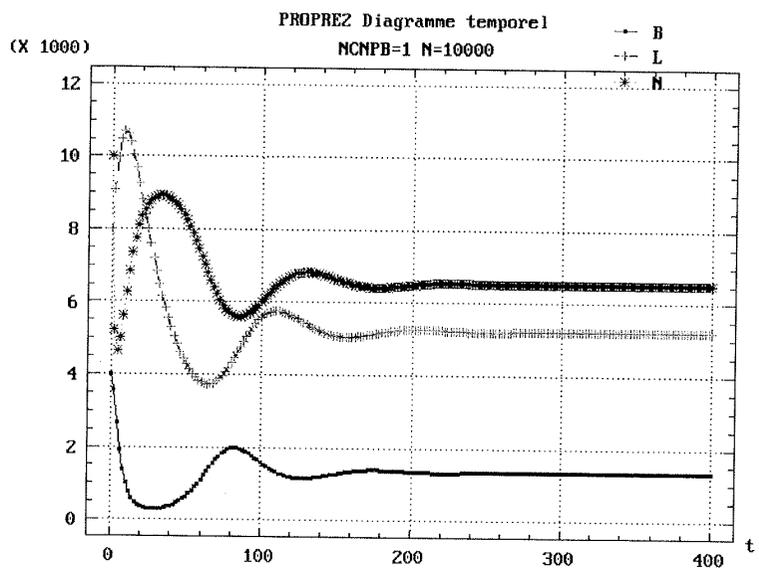
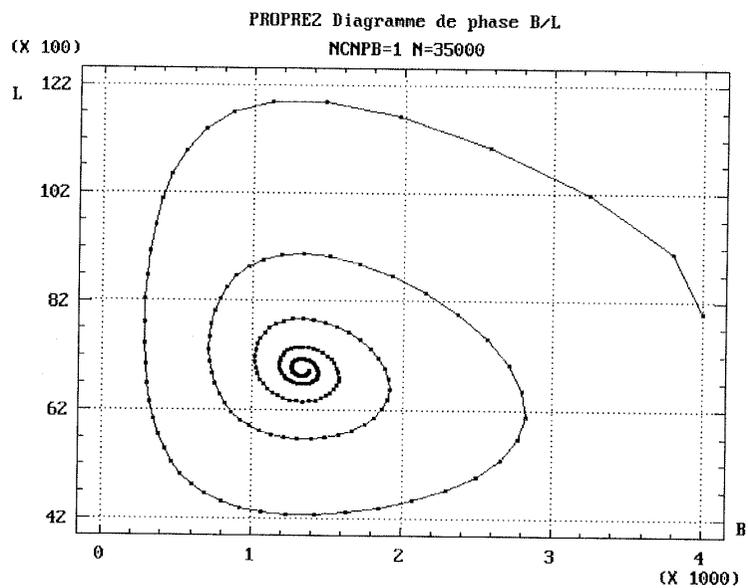
On se rend bien compte du fait que, ici encore, le système tend à diverger à partir du point initial $(4000, 8000)$. On peut alors s'interroger sur le caractère de « frein » du terme N ? Cela étant on note que la valeur initiale de N , 35000, est élevée par rapport à celle de B (4000), en outre nous avons posé $NCNPB=1/10$. On peut alors procéder à des *variations paramétriques*. On prendra tout d'abord $NCNPB=1$, en gardant $N=35000$, puis $NCNPB=1$ avec $N=10000$. Nous donnons ci-après les diagrammes temporels et les diagrammes de phase correspondants. Ils montrent l'existence d'oscillations amorties et la convergence vers une valeur d'état stationnaire.

Le « vortex », évoqué antérieurement lorsque nous avons présenté le diagramme de phase plan devient un foyer stable. Les trajectoires apparaissent comme des spirales qui y convergent. Dans \mathbb{R}^3 les trajectoires sont des courbes plus ou moins torsadées (en général) qui tendent vers un certain plan. Sous certaines conditions paramétriques ces courbes convergent vers un cycle limite, ou un foyer, dans ce plan.

Cela étant chaque point (B, L, N) dans \mathbb{R}^3 peut être assimilé à une « mouche » qui se déplacerait dans une pièce. Nous reprenons ici une image employée par Douglas Hofstadter dans un article sur « *Les nombres de Feigenbaum* » (Hofstadter, 1982). On peut avoir une idée du parcours de la mouche en suivant son ombre portée sur un mur. De plus il n'est peut-être pas nécessaire de suivre toute la trajectoire de la mouche. On peut ainsi sélectionner une suite de points discrets (B_i, L_i, N_i) en « photographiant » l'ombre de la mouche à des intervalles réguliers dans le temps. C'est-à-dire qu'on « échantillonne » (on « stroboscope ») la position de la mouche périodiquement avec une fréquence naturelle (dans le cas d'une population animale la fréquence naturelle peut être l'année). La trajectoire tridimensionnelle de la mouche est ainsi ramenée à une représentation discrète dans un plan. C'est ce que nous avons fait, mais de façon extensive, en donnant les projetés du diagramme de phase tridimensionnel dans le plan (B, L) .

Il existe d'autres types de représentations planes discrètes, notamment ce que l'on appelle une *projection de Poincaré*. On peut la représenter grossièrement de la façon suivante. Supposons que le système étudié soit caractérisé par une trajectoire périodique tridimensionnelle dans l'espace des





Figures 10, 11, 12, 13, 14, 15. Diagrammes temporels et diagrammes de phase de PROPRE2 après variations paramétriques

phases. On peut alors représenter les intersections successives des trajectoires, associées à la trajectoire limite, avec un plan P de \mathbb{R}^3 . Le plan P avec les points de coupure forme une projection ou *section de Poincaré*. D'où le schéma de principe

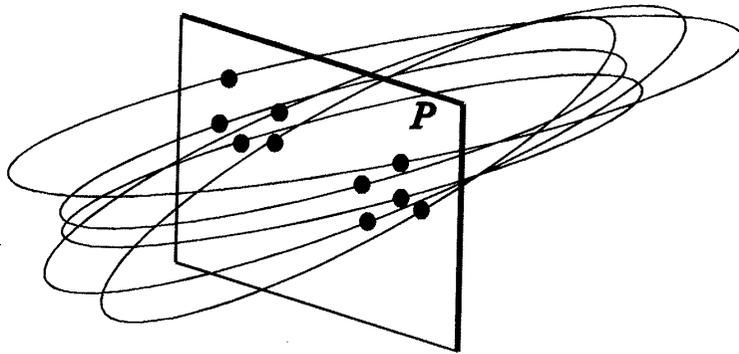


Figure 16. Illustration d'une section de Poincaré

Dans le cas présent sachant que N joue son rôle de terme limitatif on peut se contenter de tracer les points (B_i, L_i) dans \mathbb{R}^2 . Mais au lieu de considérer ces points (B_i, L_i) on peut aussi s'intéresser aux points $(B_i/BI, L_i/LI)$ où BI et LI représentent les valeurs initiales de B et L . Cela étant les courbes obtenues sont des *attracteurs étranges*. L'adjectif étrange est utilisé pour qualifier des attracteurs chaotiques complexes dont la dimension est non entière. De fait tout se passe comme si on se mettait dans un rectangle de \mathbb{R}^2 et on suit alors les itérées de (B_0, L_0) au cours du temps. La trajectoire des itérées forme un attracteur étrange au sens où l'entend, par exemple, Ivar Eklund (Eklund, 1984).

Notre modèle peut être considéré comme un générateur d'attracteur étrange au même titre que le modèle « attracteur de Hénon » tel que le présente Douglas Hofstadter (Hofstadter, 1982) à l'aide des deux équations suivantes

$$x_{n+1} = y_n - ax_n^2 + 1$$

$$y_{n+1} = bx_n$$

ou que le modèle bien connu de l'attracteur de Lorenz qui peut se présenter sous la forme suivante (Cf. Baker and Gollub, 1990, p. 37).

$$x' = \sigma(y - x)$$

$$y' = rx - y - xz$$

$$z' = xy - bz$$

Par ailleurs si l'on « entraîne » un système dissipatif avec une force périodique (comme lorsqu'on remue le café dans une tasse avec une cuillère, pour reprendre une image de Douglas Hofstadter), le système ne s'arrête pas, il s'établit une sorte d'état stationnaire. Un tel état stationnaire se traduit par une orbite stable que l'on appelle « attracteur dans l'espace des phases » (Hofstadter, 1982).

Dans le cas du modèle PROPRE2, la nourriture se régénère à raison de $1/4$ de la différence $(NI - N)$ par an, cela veut dire qu'à taux constant, ce qui n'est pas le cas puisqu'il y a rétroaction, il faudrait 4 ans pour renouveler le stock de nourriture. L'échantillonnage avec une fréquence naturelle, dont on a parlé plus haut, nécessite de définir cette fréquence. Dans le cas de l'entraînement périodique c'est la « période de l'entraîneur » (dans l'exemple de la tasse de café, on peut choisir pour instant d'échantillonnage le moment où la cuillère passe devant l'anse de la tasse). Si la force motrice (l'entraîneur) n'a pas de période naturelle, on peut définir une période « naturelle » si une des variables du système oscille entre deux valeurs extrêmes. C'est-à-dire que l'on « stroboscope » au moment où cette variable atteint un extremum. Pour ce qui est du modèle PROPRE2 on a vu que selon les valeurs choisies pour $NCNPB$ et pour N , soit il n'y a pas de modification fondamentale du comportement du couple (B, L) soit, au contraire, N joue bien son rôle de terme de Verhulst. Cela dit, comme il y a régénération de cette variable on peut se demander si elle ne peut pas être considérée comme un « pseudo-entraîneur ». Si $N=35\,000$, $NCNPB=1/10$ la périodicité moyenne est d'environ 84 ans pour des fluctuations « explosives ». Pour $N=35\,000$, $NCNPB=1$ cette périodicité moyenne tombe à 80 ans avec des fluctuations amorties. Enfin si $N=1\,000$, $NCNPB=1$ elle est de l'ordre de 95 ans, avant amortissement des fluctuations. Ces périodicités se retrouvent au cas de B et de L .

On peut utiliser ce modèle comme générateur d'un attracteur étrange en prenant $LG \# 10\,000$ en première approximation, afin d'avoir un très grand nombre de données. On considère les variables $x(u)=B/BI$, $y(u)=L/LI$, et l'on choisit en premier lieu un pas d'échantillonnage de 84 ans pour tracer un attracteur étrange dans le plan. Nous donnons, en annexe, le programme ATRACPRO (en BASIC) qui permet d'obtenir le tracé à l'écran d'un attracteur étrange issu de PROPRE2. Le tracé papier s'obtient à l'aide de

la touche « print screen » ou bien en utilisant un logiciel de recopie d'écran du type « Pizazz Plus » ®.

Plusieurs simulations sont possibles si l'on veut visualiser les problèmes de *sensibilité paramétrique* propres à ces attracteurs. Dans ATRACPRO nous nous contenterons de « jouer » sur 3 paramètres

- LG : représentant la longueur temporelle du processus de calcul,
- PE : représentant le pas d'échantillonnage, la « fréquence naturelle »,
- A3 : représentant le paramètre NTNL de PROPRES.

Nous avons considéré le modèle avec les valeurs paramétriques $N=35\ 000$, $NCNPB=1$. Compte tenu du programme utilisé l'attracteur étrange est représenté dans le repère (B/BI, L/LI) orienté comme indiqué dans le schéma ci-après

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & B/BI [X(u)] \\ \downarrow & & \\ & & L/LI [Y(u)] \end{array}$$

Nous avons réalisé plusieurs simulations.

(S1) $LG=10\ 080$ ($=120 \times 84$)/ $PE=84/A3=1/10$, sorte de « simulation de base ». Le résultat est le suivant

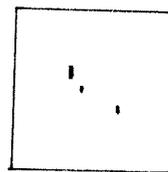


Figure 17.

Comme on peut le constater notre attracteur est réduit à sa plus simple expression, deux points distincts et plusieurs points d'accumulation. Il semblerait bien que le pas d'échantillonnage ne soit pas suffisant pour obtenir une projection significative. Le caractère « entraîneur » de N , ou « pseudo-entraîneur », n'est pas un bon critère pour le choix de la fréquence naturelle d'échantillonnage. D'où des simulations subséquentes obtenues en ne faisant varier que PE , nous n'en donnerons que deux pour illustrer ce qu'il en est.

(S2) On prend $PE=10$. Il vient

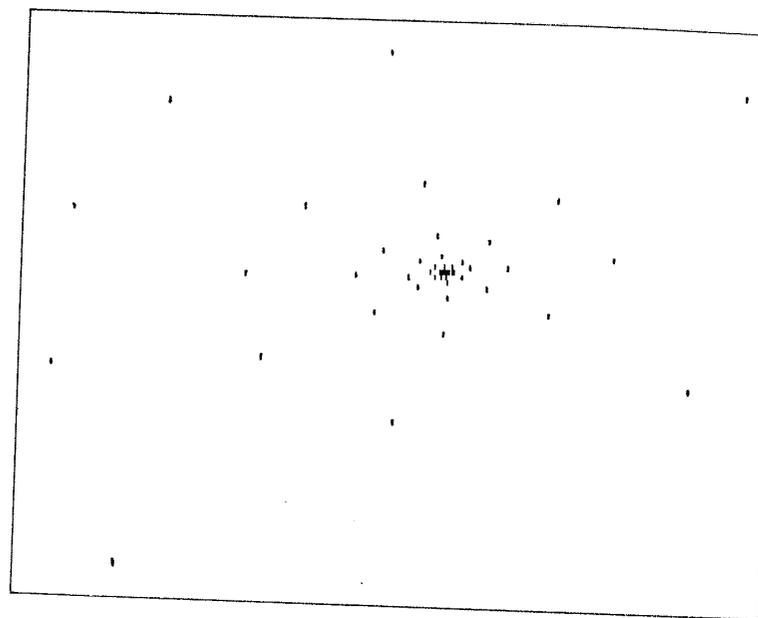


Figure 18.

L'attracteur est alors représenté par une sorte de « spirale monobranchée » s'enroulant sur elle-même, dans un sens « rétrograde » (inverse du sens d'orientation trigonométrique). Nous avons accentué les divers points de façon à bien les faire apparaître. De fait ces points sont réduits à la taille d'un « pixel » à l'écran.

(S3) Dans ce cas $PE=4$. le diagramme correspondant est donné ci-après. Le fait que le pas d'échantillonnage ait augmenté permet de mieux visualiser la forme spirale de l'attracteur convergeant vers un foyer stable.

Cela étant, on peut se demander, dans le cas présent, s'il est bien nécessaire d'avoir un très grand nombre de points (nombre caractérisé par LG) pour faire apparaître la forme de l'attracteur. De fait on trace les couples de points (B/BI, L/LI) itérés dans le plan. Le caractère périodique oscillatoire du système fait que des points « similaires » tendront à occuper des positions peu différentes. Dès lors il n'est peut-être pas utile de multiplier les points de données. Pour vérifier cette hypothèse nous avons réduit le paramètre LG dans les trois simulations précédentes. Il est apparu que l'on pouvait passer de $LG=10\ 080$

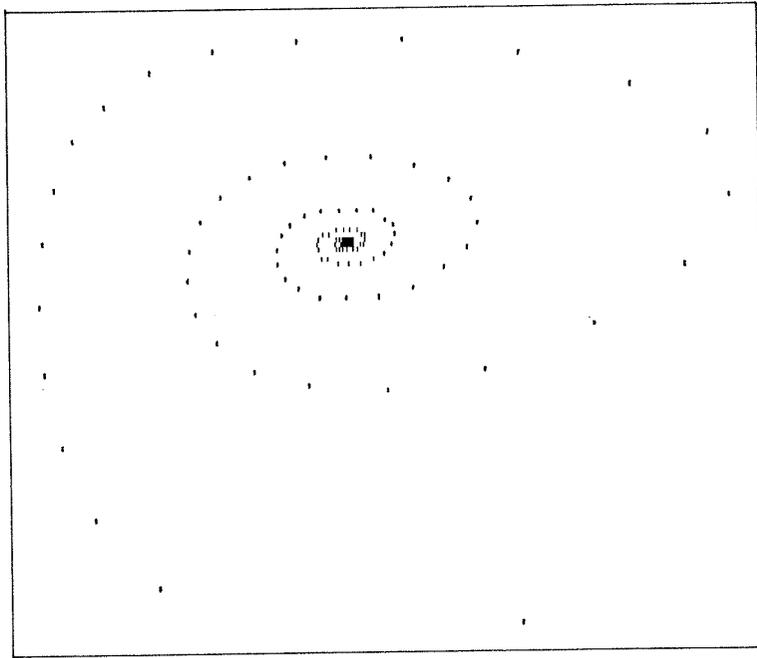


Figure 19.

à $LG=500$ (soit un nombre de points global diminué d'un facteur 20 !) sans que la forme des attracteurs soit modifiée fondamentalement.

Ainsi dans notre programme créateur d'attracteur, le paramètre essentiel pour la forme semble bien être PE. Il faut cependant prendre garde à ne pas franchir certaines limites. Il est bien évident que LG doit rester bien supérieur à PE si l'on veut que l'opération ait un sens. Le fait que l'on puisse diminuer assez fortement LG tient au caractère convergent accentué du système étudié. La diminution de LG n'entraîne qu'une diminution des « points d'accumulation » au foyer stable. Ainsi pour $PE=84$, si $LG=500$, l'attracteur se réduit à 3 points. Pour $PE=10$, $LG=300$ apparaît comme une limite, la spirale tendant à perdre des points au-delà. Enfin pour $PE=4$, $LG=250$, la forme spiralée persiste, seule la densité des points d'accumulation diminue. C'est ce que montre la figure ci-après issue d'une simulation S4.

(S4) $LG=250$, $PE=4$.

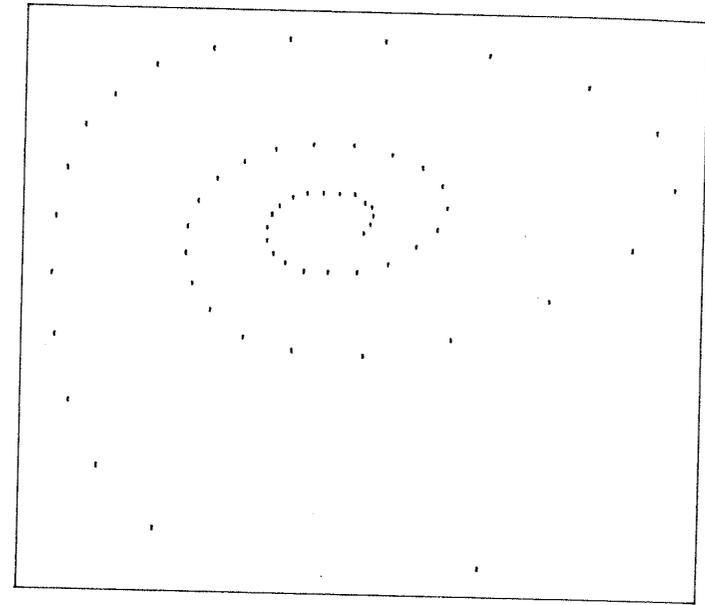


Figure 20.

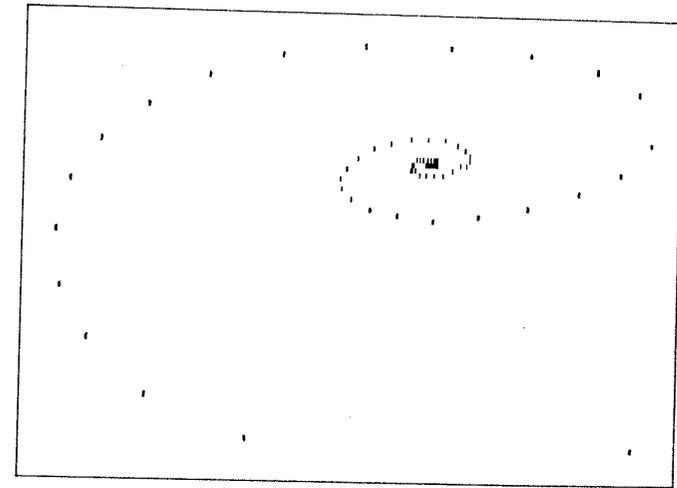


Figure 21.

En dernier lieu nous nous contenterons de faire varier le paramètre NTNL, en prenant comme paramètres dans ATRACPRO, $PE=4$ et $LG=500$. Nous avons deux simulations successives.

(S5) $A3=1/20$. Le taux de naissance « normal » des loups diminue, puisqu'à taux constant la population de loups doublerait en 20 ans au lieu de 10. On a le graphe suivant (Cf. Figure 21).

(S6) $A3=1/5$. Ici, à l'inverse, le taux de naissance « normal » des loups augmente, puisqu'à taux constant la population des loups doublerait en 5 ans au lieu de 10. On a le graphe ci-après

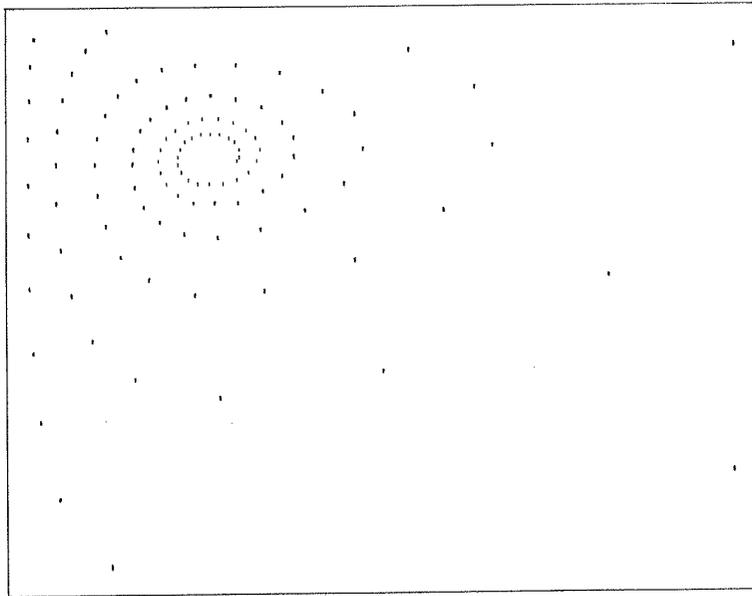
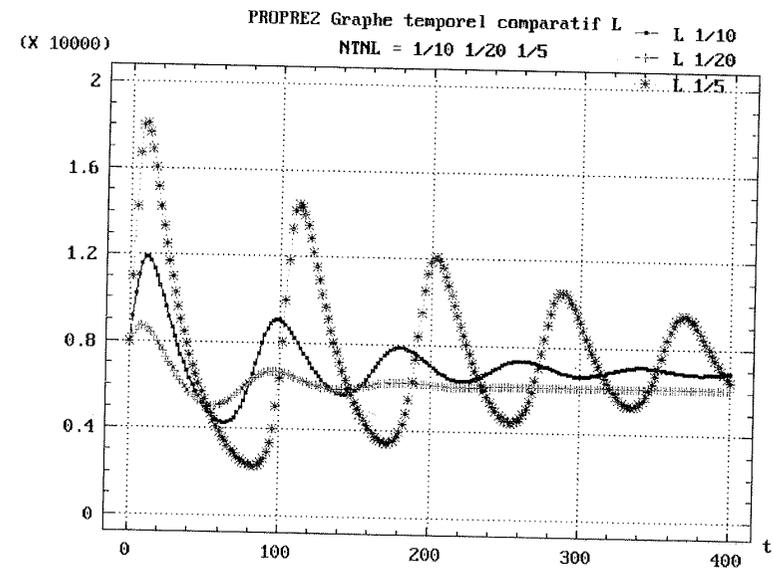
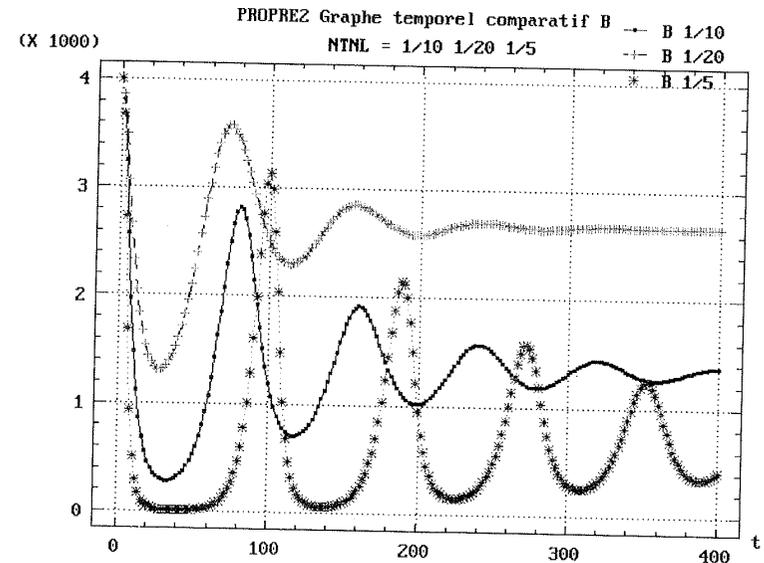


Figure 22.

Par rapport à la simulation de référence (S3) il n'y a pas de modification de la « forme spiralée convergente », seule change la « longueur » de la spirale et, pourrait-on dire, la « vitesse de convergence » vers le foyer. Comment peut-on interpréter ces différences ? Fondamentalement le facteur bloquant N n'est pas modifié. Dans (S5) NTNL, diminuant, tout se passe comme s'il y avait moins de loups. Les prédateurs étant moins nombreux, les proies



Figures 23 et 24. Graphes temporels comparatifs des variables B et L

tendent à augmenter plus, mais elles entament plus la nourriture. D'où en fait une convergence plus rapide vers l'état stationnaire. A l'inverse, dans (S6), NTNL augmente. Les prédateurs tendent à augmenter, ils utilisent donc plus de proies, lesquelles, en moyenne, entament moins le stock de nourriture. L'évolution vers l'état stationnaire est alors plus lente. Mais les fluctuations des variables B et L, sont accentuées. Ce qui explique la forme plus « massive », plus « étalée » de l'attracteur.

Ces interprétations sont confirmées si l'on trace des graphes de comportement temporel comparatifs des variables B et L pour les trois simulations concernées. Par rapport à la simulation de référence on voit bien alors la « complémentarité » entre B et L. Au cas où $NTNL = 1/20$, on a des oscillations plus amorties avec B au-dessus et L en dessous de la courbe de référence. Au cas où $NTNL = 1/5$, les oscillations sont accentuées, et les positions relatives des courbes B et L tendent à s'inverser.

Nous avons vu que PE était un paramètre important dans ATRACPRO pour ce qui est de la forme de l'attracteur. Nous pouvons ainsi revenir sur le problème posé par les deux diagrammes de phase du modèle PROPRI. Le diagramme de phase issu de la simulation sur 200 périodes montre une spirale divergente. Celui issu de ATRACPRO montre une courbe « fermée » sur elle-même. En fait cet aspect tient au paramétrage. Nous avons pris $LG = 1000$, $PE = 4$. Si l'on modifie les paramètres en prenant $LG = 200$, $PE = 2$, on retrouve bien un attracteur *spirale divergent*. Ainsi l'importance du paramètre PE est bien confirmée.

III. EN GUISE DE CONCLUSION, DES ANALOGIES DE STRUCTURATIONS SPATIALES

Le système (B/L/N) que nous venons de présenter est relativement simple, mais aussi riche d'enseignements. Par ailleurs il n'est peut-être pas aussi artificiel qu'il peut le paraître *a priori*. De fait il a son analogie « physique » en biologie où l'on peut réaliser des systèmes microbiens, proies/prédateurs, du type suivant

- Prédateurs : amibes de vase, *Dictyostelium discoideum*,
- Proies : *Escherichia coli*,
- Nourriture : glucose, substrat limitatif dans une boîte de Pétri.

Cela étant il est intéressant d'avoir recours à une analogie de structuration spatiale. Le plus étonnant est que ces amibes adoptent une position en spirale lorsque la nourriture vient à se restreindre. Nous disons « étonnant » car c'est

une disposition spatiale des proies qui correspond à une spirale dans l'espace des phases. L'analogie vaut ce qu'elle vaut, peut-être est-elle un peu hardie, mais on ne peut qu'en faire état.

Par ailleurs les structurations de l'espace observées dans les réactions chimiques périodiques présentent, elles aussi, des analogies avec ce phénomène biologique (Leglu, 1982). Cet exemple est d'ailleurs repris dans l'ouvrage grand public relativement récent de James Gleick (Gleick, 1989). L'historique des réactions chimiques oscillantes peut se présenter brièvement comme suit :

- William Bray (1921) : Eau oxygénée + Iodate de Potassium dans de l'acide sulfurique dilué.

- Boris Belousov (1958) : Bromate de Potassium + Sulfate cérique + Acide Citrique dans de l'acide sulfurique dilué. On obtient une oscillation de coloration dans le temps : Jaune → Incolore → Jaune → Incolore, etc.

- Jabotinski (1970) : Améliore la réaction de Belousov. On obtient une solution Rouge/Orange présentant une oscillation temporelle et une structuration de l'espace, propagation d'ondes bleues. La propagation des ondes se fait vers l'extérieur de la coupelle expérimentale, soit en cercles concentriques, soit en spirales. Cette structuration de l'espace est similaire à celle que l'on observe dans des boîtes de Pétri contenant une multitude d'amibes.

- Ilya Prigogine : Ce prix Nobel de chimie a créé un système d'équations, « le Brusselator », modélisant un mécanisme capable de donner naissance à une réaction chimique oscillante et susceptible d'engendrer spontanément une organisation du temps et de l'espace.

On voit ainsi que le modèle étudié ici peut avoir des correspondants physiques, au plan de la représentation spatiale, de son évolution dans un diagramme de phase.

Annexe

Le programme ATRACPRO

```

10 'Prg ATRACPRO
20 CLS
30 INPUT "Longueur, norme 10080=120*84"; LG
40 INPUT "Pas de calcul, norme=0.5"; DT
50 INPUT "PE, pas d'échantillonnage, norme=84"; PE
60 A1=1/5 : A2=1/10 : A3=1/10 : A4=1/30 : A5=1/4 : A6=1
61 B=4000 : BI=4000 : N=35000 ! : NI=35000 ! : L=8000 : LI=8000
75 SCREEN 2
80 NN=(LG/PE)
90 DIM X(NN), Y(NN)
100 'X(0)=0 : Y(0)=0
110 FOR K=0 TO LG/DT
115 T=K*DT : 'PRINT "T="; T; " ";
120 B=B + DT*(((B*A1*N)/NI)-(B*L*A2)/BI)
121 L=L + DT*(((A3*B*L)/BI)-A4*L)
122 N=N + DT*(((NI-N)*A5)-(B*N*A6)/NI)
123 IF T-(PE*INT(T/PE))<>0 THEN 140
124 U=T/PE : PRINT "u="; U;
125 IF K=0 THEN X(0)=B/BI : Y(0)=L/LI : GOTO 140
126 X(U)=B/BI : Y(U)=L/LI
140 NEXT K
150 AX=0 : BX=0 : AY=0 : BY=0
160 FOR U=1 TO NN
170 IF X(U)<AX THEN AX=X(U)
180 IF X(U)>BX THEN BX=X(U)
190 IF X(U)<AY THEN AY=Y(U)
200 IF Y(U)>BY THEN BY=Y(U)
210 NEXT U
220 DX=BX-AX : DY=BY-AY :
230 CLS : KEY OFF
240 FOR U=1 TO NN
250 X(U)=X(U)-AX : Y(U)=Y(U)-AY
260 X=INT(X(U)*(640/DX)) : Y=INT(Y(U)*(200/DY))
270 PSET (X,Y)
280 NEXT U
290 FOR I=1 TO 5 : BEEP : NEXT I
300 A$=INKEY$ : IF LEN(A$)=0 THEN 300
310 STOP
320 END

```

Références

Nous donnons ci-après une brève bibliographie ayant trait au problème des Attracteurs Étranges et du Chaos. Nous reprenons non seulement les ouvrages ou articles cités directement dans le texte, mais présentons aussi d'autres ouvrages permettant d'apporter des compléments. Cette bibliographie ne se veut en aucun cas extensive, dans la mesure où, depuis quelques années les écrits sur la théorie du chaos tendent à se multiplier, tant sous la forme de livres que d'articles.

- G. ABRAHAM-FROIS, *Dynamique économique*, Dalloz, Paris, 1991 (notamment p. 504-513, introduction à la dynamique chaotique).
- D. K. ARROWSMITH, C. M. PLACE, *An introduction to Dynamical Systems*. Cambridge University Press, New York, 1990 (notamment p. 33-35 sur les « cartes » de Poincaré).
- G. L. BAKER, J. P. GOLLUB, *Chaotic Dynamics - An Introduction*, Cambridge University Press, New York, 1990 (notamment p. 7-27 sur les espaces de phase et les sections de Poincaré, p. 42-60 pour les illustrations de ces notions, p. 136-139 pour les réactions chimiques chaotiques).
- M. BARNESLEY, *Fractals Everywhere*, Academic Press Inc., San Diego Ca., 1988 (notamment p. 82 et p. 118-171).
- M. J. BAZIN, V. RAPA, P. T. SAUNDERS, The integration of theory and experiment in the study of predator-prey dynamics - Dynamics of a Microbial System in *Ecological Stability*, Edited by USHER M. B. & WILLIAMSON M. H., Chapman & Hall, London, 1974, p. 159-164.
- P. BERGE, Y. POMEAU, Ch. VIDAL, *L'ordre dans le chaos - Vers une approche déterministe de la turbulence*, Hermann, Paris, 1984 (notamment Chapitre IV, p. 65-82 sur les sections de Poincaré et p. 98-103 sur la réaction de Belousov-Zhabotinsky).
- J. L. CASTI, *Alternate Realities - Mathematical Models of Nature and Man*, Wiley, New York, 1989 (notamment p. 249-253).
- M. COSNARD Ed., *Traitement numérique des attracteurs étranges*, Editions du CNRS, Paris, 1987 (notamment l'article de H. KAWAKAMI, p. 47-60).
- W. J. CUNNINGHAM, *Analyse non linéaire*, Dunod, Paris, 1963 (notamment p. 104-106).
- I. EKLAND, *Le Calcul, l'Imprévu - Les figures du temps de Képler à Thom*, Le Seuil, Coll. Science Ouverte, Paris, 1984.
- J. GLEICK, *La théorie du chaos - Vers une nouvelle science*, Albin Michel, Paris, 1989.
- D. HOFSTADTER, *Les nombres de Feigenbaum*, Pour la Science, n° 53, mars 1982, p. 16-25.
- D. LEGLU, *Les horloges de la chimie*, Sciences et Avenir, n° 421, mars 1982, p. 70-75.
- M. LESIEUR, *La turbulence développée*, La Recherche, n° 139, décembre 1982, vol. 13, p. 1412-1425.
- P. MANNEVILLE, *Structures dissipatives, chaos et turbulences*, Collection Aléa Saclay, 1991 (notamment les chapitres 1 et 2 ainsi que p. 252-262 sur la structuration des systèmes faiblement confinés).
- J. T. SANDEFUR, *Discrete Dynamical Systems - Theory and applications*, Clarendon Press, Oxford, 1990 (notamment p. 375-385 sur les modèles proies-prédateurs).
- V. VOLTERRA, *Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie*, Gauthier-Villars, Paris, 1931, réédition Jacques Gabay, Paris, 1990 (notamment p. 14-27, cas de deux espèces se disputant la même nourriture).