

Revue Internationale de

systemique

Vol. 12, N° 4/5, 1998

afcet

DUNOD

AFSCET

Revue Internationale de
systemique

Revue
Internationale
de Sytémique

volume 12, numéro 4 - 5, pages 363 - 380, 1998

Du modèle continu d'un réseau neuronal
biologique au modèle discret
d'un réseau connexionniste

Bassam Daya et Gilbert Chauvet

Numérisation Afscet, août 2017.



Creative Commons

Références

- J.-F. AMADIEU, L. Cadin, *Compétence et organisation qualifiante*, Paris, 1996, Economica.
- S. AUBRUN, R. OROFIAMMA, *Les compétences de 3ème dimension : ouverture professionnelle ?*, Paris, 1990, CNAM-C2F.
- L. VON BERTALANFFY, *General system theory*, New York, G. Braziller, Pub., Ct., 1968 ; *Théorie générale des systèmes*, Paris, 1973, Éd. Bordas et Paris, 1980 et 1993, Dunod.
- L. CHAMBRIER, « Apprentissage organisationnel, contingence et systèmes de représentation », in : AGRH, *Actes du 4^e congrès*, 1993.
- E. DUGUÉ, *Les employés peu qualifiés et la logique de la compétence : mobilisation ou démobilité au travail*, 1993, CNAM.
- P. GILBERT, M. PARLIER, « La compétence, du « mot valise » au concept opératoire », *Actualité de la formation permanente*, n° 116, 1992.
- P. GILBERT, M. PARLIER, La notion de compétence et ses usages en gestion des ressources humaines, *Études Entreprise et personnel - Développement et Emploi*, 1991.
- B.M. GROSS, « L'avenir de l'analyse systématique des modèles sociaux », *Analyse et prévision*, février 1967.
- B. MOURET, « Les représentations sociales : un outil d'aide à la gestion des ressources humaines », in : AGRH, *Actes du 4^e congrès*, 1993.
- A. NEWELL, H.A. SIMON, *Human problem solving*, 1972, Prentice Hall.
- M. PARLIER, *La compétence, une nouvelle clé dans la gestion des ressources humaines*, Mémoire de DESS développement de la fonction personnel, IAE Paris, 1992.
- J.-D. REYNAUD, *Les règles du jeu. L'action collective et la régulation sociale*, Paris, 1989, A. Colin.
- J.-D. REYNAUD, « Qualification et marché du travail », *Sociologie du travail*, n° 1, 1987.
- J. ROJOT, A. BERGMANN, *Comportement et organisation*, Paris, 1989, Vuibert Gestion.
- J. DE ROSNAY, *Le microscope*, Paris, 1989, Le Seuil.
- C. SAURET, « La gestion de l'emploi et des compétences », *Personnel*, n° 331, mars-avril 1992.
- M. STROOBANTS, « Travail et compétences : récapitulation critique des approches des savoirs au travail », *Formation emploi*, n° 33, janvier-mars 1991.

DU MODÈLE CONTINU D'UN RÉSEAU NEURONAL BIOLOGIQUE
AU MODÈLE DISCRET D'UN RÉSEAU CONNEXIONNISTEBassam DAYA¹ et Gilbert CHAUVET^{1,2}

Résumé

La modélisation de la dynamique continue d'un réseau biologique impose de considérer des équations aux dérivées partielles plutôt que des équations différentielles ordinaires. Dans ce sens, une théorie du champ pour les systèmes biologiques a été proposée par G. Chauvet qui a introduit un opérateur de champ non local. Dans ce papier, nous proposons une nouvelle représentation des équations du champ appliquées au tissu nerveux pour les deux niveaux d'organisation neuronale et synaptique et nous montrons en toute généralité que le modèle connexionniste classique est un cas particulier du modèle décrit par le nouveau formalisme.

Abstract

The modeling of the continuous dynamics of biological networks leads to consider partial derivatives equations rather than ordinary differential equations. In this sense, a field theory has been proposed by G. Chauvet who introduced a non local field operator. In this paper, we propose a new representation of the field equations in the case of the nervous system for the two levels of organization, neuronal and synaptic, and we show that the classic connexionist model is a particular case of the model described by this new formalism.

1. INTRODUCTION

Les réseaux de neurones biologiques se caractérisent généralement par le grand nombre de neurones et le grand nombre de synapses par neurone. Une approche continue est donc loisible pour tenir compte de la localisation géométrique des neurones et des synapses. De plus la représentation continue du système biologique, dans laquelle est décrite la variation continue des varia-

¹ Institut de Biologie Théorique, 10 rue André Bocquel, 49100 Angers, France.² Biomedical Engineering, University of Southern California, Los Angeles, USA.

bles d'état, est un choix qui résulte de notre conception continue de l'espace (Arbib 72). Un tel choix semble être le plus naturel puisqu'il représente le système physique.

Une théorie de champ a été proposée par G. Chauvet (Chauvet 93a, 93b) pour décrire la dynamique continue du réseau neuronal biologique. Ce lien entre la théorie des réseaux de neurones et la théorie du champ est très utile, puisqu'il permet, d'une part de mettre à profit la bonne connaissance de ce type de théorie pour les systèmes dynamiques continus d'autre part de tenir compte de la géométrie du système.

Le système biologique présente trois caractéristiques importantes : plusieurs niveaux d'organisation, densités géométriques des neurones et des synapses et existence d'interactions non locales entre les différents éléments biologiques. En incorporant les conditions appropriées à l'existence de plusieurs niveaux d'organisation et aux densités géométriques continues des neurones et des synapses dans les modèles de réseaux de neurones, la théorie du champ proposée introduisait des interactions non locales entre sous-structures biologiques (Chauvet 93a, 96a, 96b). En effet, la propriété de non-localité était prise en compte en introduisant un opérateur de champ non local dans les équations du champ, et elle était démontrée comme nécessaire dès lors que le phénomène se produit à différents niveaux d'organisation.

Dans cet article, outre le rappel de la théorie, nous montrons que l'on peut passer en toute généralité du réseau continu au réseau discret avec ou sans délais de propagation, en choisissant des « fonctions » de Dirac (distributions de Dirac) pour les densités géométriques dans les équations du champ non local. Plus particulièrement, on peut retrouver le modèle du cervelet proposé par G. Chauvet (Chauvet 86, 95).

Dans la section 2 nous présentons un rappel sur la théorie du champ, et dans la section 3 nous proposons une nouvelle représentation des équations du champ appliquées au tissu nerveux. Nous montrons les liens théoriques avec les modèles discrets classiques des réseaux de neurones formels dans la section 4.

2. LA THÉORIE DU CHAMP DE G. CHAUVET

Dans le cadre de la théorie physique des champs une interaction se propage, avec une vitesse finie d'un point appelé « source » vers un autre point appelé « puits ». Une source en (r', T') , représentée par $\Gamma(r', T')$, crée un champ $\psi(r', T')$ qui agit sur un point voisin (r_0, T_0) . Si, en ce point, une source qui

est mathématiquement décrite par $\Gamma(r_0, T_0)$ existe et interagit avec le champ ψ alors une nouvelle valeur du champ qui agit à nouveau sur un autre point voisin, et ainsi de suite. Finalement, on observe une propagation du champ après son interaction permanente avec les sources, qui sont aussi des puits (Figure 1).

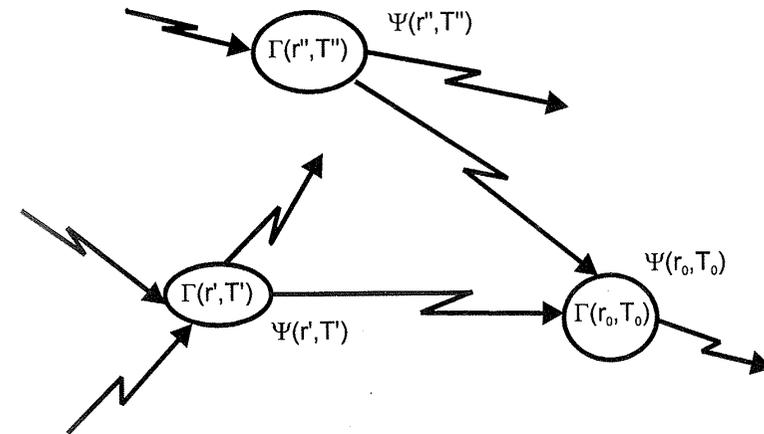


Figure 1. Les interactions fonctionnelles entre les neurones sont dynamiquement représentées par les champs Ψ . Les sources sont représentées par Γ . Les symboles r_0, r', r'' et T_0, T', T'' représentent respectivement les points de l'espace et du temps.

L'équation formelle qui représente la variation de la variable de champ ψ est la suivante :

$$H(\psi)\psi(r_0, T_0) = \Gamma(r_0, T_0) \quad (1)$$

où ψ est le champ d'excitation qui est propagé par l'opérateur de champ H , et $\Gamma(r_0, T_0)$ est le terme de source pour une source localisée en (r_0, T_0) . Une équation similaire a été utilisée pour un seul niveau d'organisation (Beurle 56, Griffith 63, Wilson et al. 72, Fischer 73, Kishimoto et al. 79).

2.1. Phénomène local

Les équations qui décrivent les mécanismes élémentaires dans un intervalle d'espace infiniment petit sont des équations locales. Un exemple est donné par les équations de réaction-diffusion (Murray 89, Chauvet 96a). Des équations

aux dérivées partielles locales peuvent alors représenter la dynamique du système.

Le problème de la détermination de l'opérateur de champ H n'est pas facile, car il doit contenir les opérateurs intégraux et toutes les dérivées d'ordre quelconque par rapport au temps et à l'espace. Le plus souvent, la forme de H est imposée par la géométrie de l'espace ou par des considérations liées aux symétries. Par exemple, et seulement dans quelques cas de bonne régularité, l'opérateur de champ H peut être choisi invariant par rotation et translation :

$$H(\psi) \equiv \frac{\partial}{\partial T} - D\nabla^2 \quad (2)$$

Le premier terme représente la réaction et le deuxième la diffusion libre (avec déplacement) qui dépend seulement des propriétés du milieu extracellulaire. Un important problème est la détermination de la constante de diffusion D qui représente le transfert de ψ dans l'espace extracellulaire. Ce coefficient de diffusion D décrit les propriétés de la matière dans l'espace. Puisque celle-ci est généralement non homogène, le deuxième terme est remplacé par $\psi\nabla(D\nabla\psi)$.

Donc en utilisant l'équation (2), l'équation (1) au point (r_0, T_0) devient :

$$\frac{\partial\psi}{\partial T} = D\nabla^2\psi + \Gamma \quad (3)$$

Cette équation de réaction-diffusion a pu être déduite de l'équation de Hodgkin-Huxley (Hodgkin et al. 52), et peut être retrouvée par application de la loi de conservation de la matière à ce problème (Chauvet 93b). Ce type d'équation est utilisé dans des différents domaines en biologie (Murray 89) et en écologie (Okubo 80).

2.2. Phénomène non local

Par rapport à la réalité biologique, il est insuffisant de considérer le phénomène comme local, puisque l'effet des phénomènes d'un niveau donné sur les autres niveaux d'organisation n'est pas pris en compte.

A cause de cette représentation du système biologique, la propriété de non-localité conduit à un opérateur de champ non local dans les équations du champ. La distinction entre la propagation dans l'espace intracellulaire et la diffusion dans l'espace extracellulaire est importante, puisqu'elle conduit à les considérer comme des phénomènes non local et local respectivement. En outre, l'existence des délais de propagation entre les neurones, liée à la géomé-

trie du système, impose de prendre en compte des effets non locaux. Les équations de réaction-diffusion symétriques ne peuvent pas représenter le phénomène de propagation dans le cas d'un système non local et non symétrique. C'est aussi le cas de l'équation de Hodgkin-Huxley qui représente la propagation du potentiel d'action dans les deux sens de l'axone à partir de n'importe quel point initial.

Une solution à ces problèmes, tenant compte de l'existence de la non-localité et de la non-symétrie a consisté à ajouter à l'équation dynamique locale d'un seul neurone, un terme non local et non symétrique qui décrit l'action unidirectionnelle du neurone à distance. On a donc choisi un opérateur d'interaction H_I dépendant de i pour tenir compte des non linéarités :

$$H(\psi) \equiv \frac{\partial}{\partial T} - D\nabla^2 - H_I(\psi) \quad (4)$$

où le troisième terme $H_I(\psi)$ est un opérateur d'interaction non locale entre les unités. Cet opérateur H_I permet d'inclure des concepts spécifiques pour donner au système biologique ses caractéristiques fonctionnelles particulières (non-localité, non-symétrie, ...). Dans l'expression de l'opérateur d'interaction non locale, une fonction potentielle V a été introduite ayant pour rôle d'interagir avec le champ en un point (r, T) et qui est donnée par :

$$H_I(\psi)\psi = \int_{D_R(r_0)} V_\psi(r_0, T_0, r', T'; \Gamma(r', T'))\rho(r')dr' \quad (5)$$

Donc en utilisant les équations (4) et (5), l'équation (1) au point (r_0, T_0) devient :

$$\frac{\partial\psi}{\partial T} = D\nabla^2\psi + \int_{D_R(r_0)} V_\psi(r_0, T_0, r', T'; \Gamma(r', T'))\rho(r')dr' + \Gamma \quad (6)$$

où $\rho(r')$ est la densité des unités en r' . La vitesse de transport finie v_ψ entre deux unités apparaît à travers le terme $\psi(r', T') = \psi(r', T_0 - d/v_\psi)$ où $d = |r' - r|$, et l'existence de l'interaction fonctionnelle avec cette vitesse finie implique la non-localité.

2.3. Les variables de champ neuronal

Dans le cas du système nerveux, il existe des interactions fonctionnelles entre les synapses et entre les neurones. Puisque l'espace des synapses est inclus dans l'espace des neurones et que deux échelles de temps différentes sont attachées à ces deux espaces, on peut définir un système fonctionnel hiérarchique. L'unité structurale, le « neurone », n'est pas réductible à un point,

puisque d'autres unités structurales « synapses » existent dans le neurone : la dynamique du neurone dépend évidemment de celle des synapses. Pour cela, il faut prendre en compte au moins deux niveaux d'organisation : le niveau des neurones et le niveau des synapses (Figure 2).

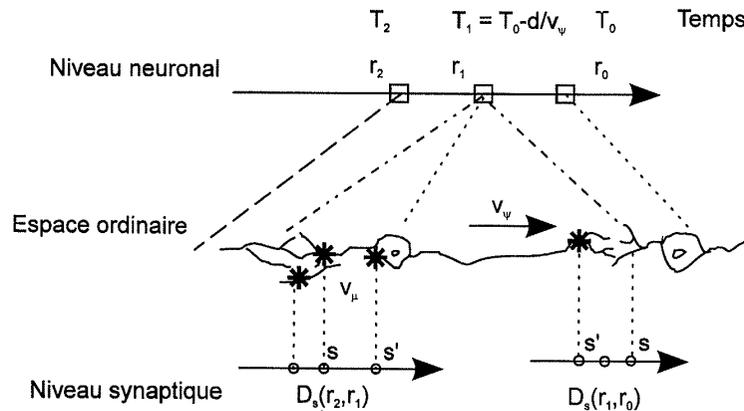


Figure 2. Définition de l'espace ordinaire et de ses deux niveaux synaptique et neuronal.

Le choix des variables de champ est suggéré par l'expérience. Il est souhaitable de prendre comme variables de champ des quantités observées, c'est-à-dire des observables qui ont une signification physique et qui apportent une aide à l'interprétation.

Niveau neuronal. On note $\Phi(s, t)$ le potentiel de membrane local postsynaptique (PPS) au point (s, t) et $\psi(r, T)$ la dépolarisation somatique locale présynaptique au niveau de la « bosse » de l'axone au point (r, T) dans l'espace des neurones (voir figure 3).

Sans tenir compte des mécanismes élémentaires, l'activité somatique locale instantanée $X(r, T)$ dans l'échelle de temps $\{T\}$ est déduite de la dépolarisation somatique locale présynaptique $\psi(r, T)$, par une fonction non linéaire, généralement supposée être une fonction sigmoïde F :

$$X(r, T) = F(\langle \psi(r, T) \rangle(T)) \quad (7)$$

où $\langle \psi(r, T) \rangle(T)$ est la moyenne de ψ au temps T .

On prend comme variable de champ dans les équations du champ au niveau neuronal, où l'échelle de temps est $\{T\}$, la dépolarisation somatique locale

présynaptique ψ du neurone qui dépend de la fréquence des potentiels d'action, c'est-à-dire de l'activité du neurone.

Niveau synaptique. Le choix de la variable de champ est plus difficile que dans le cas du niveau neuronal à cause de l'interprétation moléculaire délicate des phénomènes synaptiques.

Avec les définitions de la figure 3, une définition générale de l'efficacité synaptique au point $s(r, r_0)$ peut être :

$$\mu(s, t) = C[\Phi(s, t), \langle \psi(r, T) \rangle(t)] \quad (8)$$

où : $\{t\}$ est l'échelle de temps du niveau synaptique qui est plus grande que celle du niveau neuronal ; $s \Rightarrow s(r, r_0)$ pour alléger l'écriture ; $\langle \psi(r, T) \rangle(t)$ est la moyenne de ψ au temps t ; la fonction C est une fonction générale qui doit être déterminée.

On peut prendre $t = kT$, où k est une constante réelle supérieure à 1, pour représenter les deux échelles de temps dans une même échelle.

L'expression de μ inclut implicitement l'effet des mécanismes de l'efficacité présynaptique du neurone r (à travers $\langle \psi(r, T) \rangle(t)$) et celui de mécanismes de l'efficacité postsynaptique du neurone r_0 (à travers Φ).

On choisit donc l'efficacité synaptique μ comme la variable de champ dans les équations du champ au niveau synaptique.

3. APPLICATION AU TISSU NERVEUX

3.1. Ré-écriture des équations du champ

Considérons maintenant les équations du champ non local des niveaux d'organisation neuronal et synaptique, en prenant les variables de champ choisies dans le paragraphe précédent.

Dans ces deux niveaux d'organisation, on considère deux espaces d'unités avec les notations suivantes : $D_R(r_0)$ est l'ensemble des neurones qui agissent sur le neurone r_0 (c'est-à-dire connectés au neurone r_0) ; $D_r(s', r_0)$ est l'ensemble des neurones connectés au neurone r_0 par la synapse $s'(r_0)$; $D_S(r_0)$ est l'ensemble des synapses qui entoure le neurone r_0 ; $D_s(r', r_0)$ est l'ensemble des synapses qui connectent le neurone r' au neurone r_0 (Figure 4). Avec ces nouvelles définitions des espaces d'unités, on peut déduire :

$$D_R(r_0) = \{r' \text{ tels que } D_s(r', r_0) \neq \emptyset\}$$

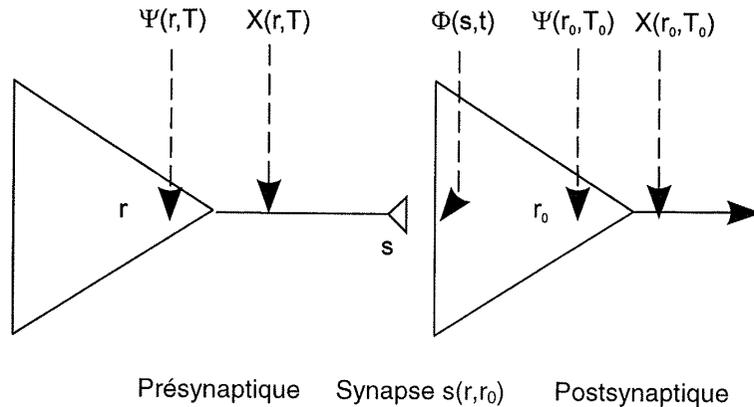


Figure 3. Définition de l'activité d'entrée $X(r, T)$, du potentiel de membrane local postsynaptique (avant le neurone r_0) $\Phi(s, t)$ dans l'espace des synapses, de la dépolarisation somatique locale présynaptique (après le neurone r_0) $\psi(r_0, T_0)$ dans l'espace des neurones et de l'activité de sortie $X(r_0, T_0)$. La dépolarisation somatique locale présynaptique et l'efficacité synaptique liée au potentiel de membrane local postsynaptique, ont été choisies comme variables de champ.

L'ensemble $D_s(r', r_0)$ est vide quand le neurone r' n'est pas connecté aux synapses qui entourent le neurone r_0 .

Les équations du champ neural dans les deux niveaux d'organisation sont données par :

$$\frac{\partial \psi(r_0, T_0)}{\partial T} = \nabla_r (D_r \nabla_r \psi(r_0, T_0)) + \int_{D_r(r_0)} \rho(r') \psi(r', T') B(r_0, T_0, r', T') \int_{D_s(r', r_0)} \pi(s'; (r', r_0)) \mu(s', t') ds' dr' + \Gamma_\psi(r', t_0) \quad (9)$$

$$\frac{\partial \mu(s, t)}{\partial t} = \nabla_s (D_s \nabla_s \mu(s, t)) + \int_{D_s(r_0)} \pi'(s'; s) A(s, s') \int_{D_s(s', r_0)} \rho'(r'; (s', r_0)) \times \mu_0(r', t') ds' dr' + \Gamma_\mu(s, t) \quad (10)$$

où, dans la première équation (9), D_r est la constante de diffusion libre dans l'espace neuronal ; $T' = T_0 - (d'/v_\psi)$, où $d' = |r' - r_0|$ et v_ψ est la vitesse de transport de l'interaction (ψ) au niveau neuronal ; $\pi(s'; (r', r_0))$ est la fonction de la densité de connexion synaptique entre le neurone au point (r', T') et les synapses du neurone r_0 au point (s', t') ; $\rho(r')$ est la densité des neurones

dans l'espace r' qui décrit la connectivité entre les neurones r' et le neurone r_0 ; $B(r_0, T_0, r', T')$ est un facteur d'atténuation entre les points (r', T') et (r_0, T_0) .

Dans la deuxième équation (10), D_s est la constante de diffusion libre dans l'espace synaptique ; $t' = t - (|s' - s|/v_\mu)$, où v_μ est la vitesse de transport de l'interaction (μ) au niveau synaptique ; $\pi'(s'; s)$ est la fonction qui décrit la connectivité entre les synapses $s'(r_0)$ et une synapse $s(r_0)$ par des poids que l'on pourrait appeler « sous-synaptiques » (semblable à la fonction $\rho(r'; r_0)$ mais pour le niveau inférieur) ; $\rho'(r'; (s', r_0))$ est la densité des neurones dans l'espace r' qui décrit la connectivité entre une synapse en $(s'(r_0), t')$ et entre les neurones au point (r', T') ; $A(s, s')$ est le facteur d'atténuation du potentiel électrique entre les points s et s' par unité de temps ; $\mu_0(r', t')$ est l'efficacité synaptique locale définie comme la moyenne dans l'intervalle de temps ΔT de l'efficacité synaptique locale instantanée σ_0 .

3.2. Mécanismes d'interaction

Nous prenons les hypothèses suivantes, qui sont déduites des mécanismes d'interaction dans le tissu nerveux (Chauvet, 93b):

(i) La dynamique linéaire présynaptique et postsynaptique locale est représentée par :

$$\Gamma_\mu = m\mu(s, t) \quad (11)$$

(ii) Le couplage entre les efficacités présynaptique (ξ) et postsynaptique (η), qui conduit à l'efficacité synaptique local μ_0 , est multiplicatif :

$$\mu_0(s, t) = \langle \xi(s, t) \eta(s, t) \rangle \quad (12)$$

L'efficacité présynaptique ξ et l'efficacité postsynaptique η sont données par :

$$\xi(s, t; \xi^0(\langle X \rangle)) = a(\xi^0(s); r) \langle X(r, T) \rangle(t) \\ \eta(s, t; \eta^0(\langle X \rangle)) = b(\eta^0(s_0, s); r) \langle X(r_0, T_0) \rangle(t) \quad (13)$$

où, ξ^0 est le niveau de base de l'efficacité présynaptique, qui est une fonction de l'activité synaptique moyenne $\langle X \rangle$; η^0 est le niveau de base de l'efficacité postsynaptique, qui est aussi une fonction de l'activité synaptique moyenne $\langle X \rangle$.

(iii) Une interprétation pour la source Γ_ψ peut être donnée par une expression particulière et simplifiée, en supposant qu'elle dépend d'une transformation linéaire locale stricte, selon la formule suivante :

$$\Gamma_\psi(r_0, T_0) = p\psi(r_0, T_0) \quad (14)$$

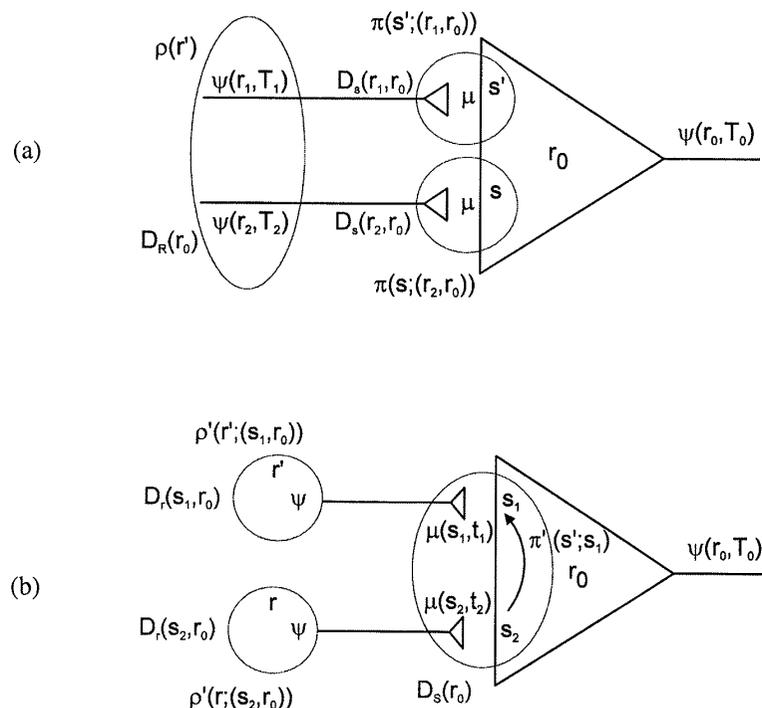


Figure 4. Définition de l'espace des unités. a) L'ensemble des neurones qui sont connectés au neurone r_0 est noté $D_R(r_0)$. Les synapses qui connectent le neurone r' au neurone r_0 constituent l'ensemble $D_s(r', r_0)$. b) L'ensemble des synapses du neurone r_0 est noté $D_s(r_0)$. Les neurones connectés au neurone r_0 par la synapse $s'(r_0)$ constituent l'ensemble $D_r(s', r_0)$.

L'introduction d'un opérateur de champ non local dans les équations du champ pour représenter correctement les mécanismes biologiques du système nerveux permet également de passer au système discret sous certaines conditions supplémentaires.

4. PASSAGE AU SYSTÈME DISCRET

4.1. Hypothèses suffisantes à la discrétisation

Le formalisme utilisé dans la théorie du champ est déterministe et continu à chaque niveau d'organisation. Une représentation discrète du réseau neuronal

peut être obtenue par concentration des valeurs des variables de champ en certains points de l'espace des neurones. Ceci peut se faire avec des fonctions densité particulières, comme les « fonctions » de Dirac. Ces fonctions concentrent toutes les valeurs des variables de champ en n'importe quel point r de l'espace des unités en n points r_i , où $i = 1$ à n . Les équations aux dérivées partielles distribuées dans l'espace se transforment alors en n équations différentielles, une pour chaque point r_i .

Ainsi, les hypothèses prises pour la discrétisation sont les suivantes :

(C1)- Le facteur d'atténuation du potentiel électrique $A(s, s') = 1$.

(C2)- Le facteur d'atténuation $B(r_0, T_0, r', T') = 1$.

(C3)- La membrane du neurone est homogène.

(C4)- La vitesse du transport axonal de l'interaction est infinie : $v_\psi \approx \infty$ et $v_\mu \approx \infty$.

(C5)- Les fonctions a et b des équations (13) sont des constantes.

(C6)- La diffusion de la dépolérisation somatique est négligeable, c'est-à-dire $D_s = D_r = 0$.

Dans le cas d'un seul neurone, les variables de champ se réduisent à n valeurs concentrées en r_i , où $i = 1$ à n . On obtient une seule équation différentielle au niveau neuronal (autour du neurone r_0) et n équations différentielles au niveau synaptique.

4.2. Equations du champ neural dans le cas d'une représentation discrète

Nous abordons maintenant le cas général de plusieurs neurones. De nouvelles conditions doivent être ajoutées concernant les fonctions densité des neurones $\rho(r')$ et $\rho'(r'; (s', r_0))$, et les fonctions densité de connectivité $\pi'(s'; (r', r_0))$ et $\pi'(s'; s)$. Ces fonctions décrivent la structure géométrique du réseau neuronal biologique.

Pour le niveau neuronal :

$$\rho(r') = \sum_{i=1}^n \delta(r' - r_i) \quad (15)$$

$$\pi(s'; (r', r_0)) = \sum_{i=1}^n \delta(r' - r_i) \sum_{k=1}^{p_i} \delta(s' - s_{ki}) \quad (16)$$

Pour le niveau synaptique :

$$\rho(r';(s', r_0)) = \sum_{i=1}^n \delta(s' - s_i) \sum_{k=1}^{q_i} \delta(r' - r_{ki}) \quad (17)$$

$$\pi'(s'; s) = \sum_{i=1}^n \delta(s' - s_i) \quad (18)$$

où,

n : est le nombre des entrées du neurone, qui est aussi le nombre des poids synaptiques liés au neurone.

p_i : est le nombre des poids synaptiques qui lient le neurone avec l'entrée numéro i .

q_i : est le nombre des entrées connectées au poids synaptique numéro i .

Les équations du champ (9) et (10) deviennent, en se basant sur les considérations citées ci-dessus, les suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi(r_0, T_0)}{\partial T} &= \int_{D_R(r_0)} \sum_{i=1}^n \delta(r' - r_i) \psi(r', T') \int_{D_{s_i}(r', r_0)} \sum_{i=1}^n \delta(r' - r_i) \\ &\times \sum_{k=1}^{p_i} \delta(s' - s_{ki}) \mu(s', r') ds' dr' + p \psi(r_0, T_0) \end{aligned} \quad (19)$$

et pour $i = 1$ à n :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu(s_p, t)}{\partial t} &= abX(\langle \psi \rangle)(r_0, T_0) \int_{D_{s_i}(r', r_0)} \sum_{i=1}^n \delta(s' - s_i) \int_{D_R(r_0)} \sum_{i=1}^n \delta(s' - s_i) \\ &\times \sum_{k=1}^{q_i} \delta(r' - r_{ki}) X(\langle \psi \rangle)(r', T') ds' dr' + m_i \mu(s_p, t) \end{aligned} \quad (20)$$

Après intégration, on obtient :

$$\frac{\partial \psi(r_0, T_0)}{\partial T} = \sum_{i=1}^n \psi(r_p, T_{(ki)i}) \sum_{k=1}^{p_i} \mu(s_{ki}, t) + p \psi(r_0, T_0) \quad (21)$$

et pour $i = 1$ à n :

$$\frac{\partial \mu(s_p, t)}{\partial t} = abX(\langle \psi \rangle)(r_0, T_0) \sum_{k=1}^{q_i} X(r_{ki}, T_{i(ki)}) m_i \mu(s_p, t) \quad (22)$$

Avec les notations suivantes :

(i) $\mu(s_{ki}, \cdot) = \mu_{ki}(\cdot)$, et $\mu(s_p, \cdot) = \mu_i(\cdot)$

(ii) $\Psi(r_0, \cdot) = \Psi(\cdot)$, et $\Psi(r_p, \cdot) = \Psi_i(\cdot)$

(iii) $X(r_{ki}, \cdot) = X_{ki}(\cdot)$

(iv) $T_{(ki)i}$ décrit l'intervalle de temps qui sépare μ_{ki} de Ψ_i .

(v) $T_{i(ki)}$ décrit l'intervalle de temps qui sépare μ_i de X_{ki} .

Les équations (21) et (22) s'écrivent :

$$\frac{\partial \psi(T_0)}{\partial T} = \sum_{i=1}^n \psi_i(T_{(ki)i}) \sum_{k=1}^{p_i} \mu_{ki}(t) + p \psi(T_0) \quad (23)$$

et pour $i = 1$ à n :

$$\frac{\partial \mu_i(t)}{\partial t} = abX(\langle \psi \rangle)(T_0) \sum_{k=1}^{q_i} X_{ki}(T_{i(ki)}) + m_i \mu_i(t) \quad (24)$$

Chacune de ces deux équations, est écrite dans sa propre échelle de temps, $\{t\}$ pour le niveau synaptique et $\{T\}$ pour le niveau neuronal ($\{t\} \gg \{T\}$).

Utilisant l'échelle de temps du niveau synaptique $\{t\}$ au lieu de $\{T\}$ et supposant que :

$$T_0 = T_{(ki)i} = T_{i(ki)} = t \quad (25)$$

cette égalité (25) est valable, dans le cas où les délais de propagation sont négligeables.

Les équations (23) et (24) seront :

$$k \Psi(t) = \sum_{i=1}^n \psi_i(t) \sum_{k=1}^{p_i} \mu_{ki}(t) + p \psi(t) \quad (26)$$

où k est une constante réelle supérieure à 1, qui représente le rapport entre les deux échelles de temps $\{t\}$ et $\{T\}$.

et pour $i = 1$ à n :

$$\mu_i(t) = abX(\langle \psi \rangle)(t) \sum_{k=1}^{q_i} X_{ki}(t) + m_i \mu_i(t) \quad (27)$$

Le fait que la variation moyenne de la dépolarisation somatique soit faible, autrement dit que la variation globale soit presque nulle, entraîne pour l'équation (26) :

$$\Psi(t) = 0 \quad (28)$$

car l'efficacité synaptique varie dans une échelle de temps plus longue que celle de la dépolarisation somatique. Les connexionnistes utilisent des équations similaires aux équations (26) et (27) mais en substituant les activités neuronales à la place des dépolarisations somatiques ($\psi_i(t)$ est considérée comme l'activité présynaptique $X_i(t)$, et $\psi(t)$ comme l'activité postsynaptique $Y(t)$).

Pour retrouver les équations des réseaux de neurones formels utilisant les règles de Hebb classiques, on adopte des sources Γ_μ nulles ($m_i = 0$).

Les équations (26) et (27) seront alors écrites sous la forme suivante :

$$Y(t) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n X_i(t) \sum_{k=1}^{p_i} \mu_{ki}(t) \quad (29)$$

et pour $i = 1$ à n :

$$\dot{\mu}_i(t) = abX(t) \sum_{k=1}^{q_i} X_{ki}(t) \quad (30)$$

où

$\mu_{ki}(t)$: est le $k^{\text{ième}}$ poids synaptique de l'ensemble $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}$ qui connecte $Y(t)$ avec $X_i(t)$.

$X_{ki}(t)$: est la $k^{\text{ième}}$ entrée de l'ensemble $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ qui est connectée avec $Y(t)$ par $\mu_i(t)$.

Avec $\alpha = ab$, $p = -1$ et $p_i = q_i = n$, on aura les équations qui correspondent à la figure 5 représentant un neurone complètement connecté avec ses entrées.

Pour un neurone avec délais de propagation, il suffit de remplacer l'équation (25) par une égalité qui tient compte du retard entre une entrée X_i et un poids synaptique μ_j .

$$T_0 = t, \quad T_{i(ki)} = t - \tau_{ij} \quad \text{et} \quad T_{(ki)i} = t - \tau_{ji} \quad (31)$$

où

$\tau_{ij} = \tau_{i(ki)}$: est le retard entre $X_j(t) = X_{ki}(t)$ et $\mu_i(t)$.

$\tau_{ji} = \tau_{(ki)i}$: est le retard entre $X_i(t)$ et $\mu_j(t) = \mu_{ki}(t)$.

Les équations (29) et (30) seront écrites sous la forme suivante :

$$Y(t) = \frac{-1}{p} \sum_{i=1}^n X_i(t - \tau_{(ki)i}) \sum_{k=1}^{p_i} \mu_{ki}(t) \quad (32)$$

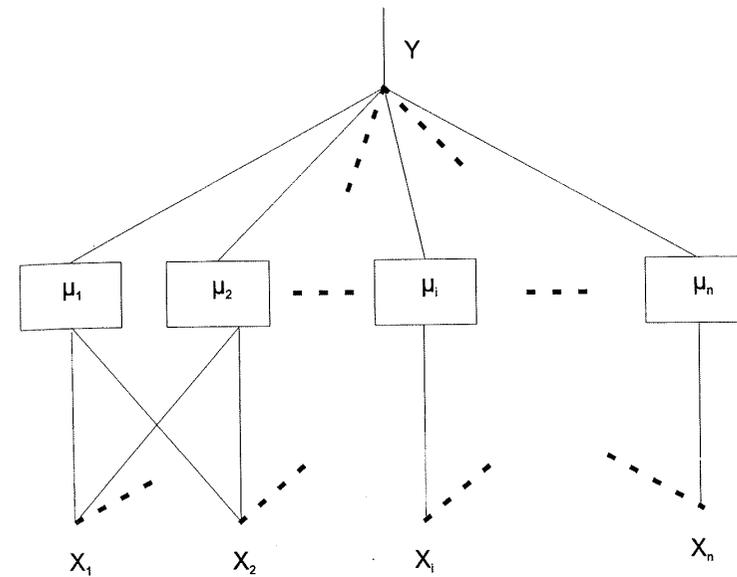


Figure 5. Un neurone de sortie $Y(t)$ complètement connecté avec ses n entrées $X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)$ par les n efficacités synaptiques $\mu_1(t), \mu_2(t), \dots, \mu_n(t)$.

et pour $i = 1$ à n :

$$\dot{\mu}_i(t) = abY(t) \sum_{k=1}^{q_i} X_{ki}(t - \tau_{i(ki)}) \quad (33)$$

En prenant $\alpha = ab$, $p = -1$ et $p_i = q_i = n$, on aura les équations qui correspondent à la même structure que celle de la figure 5, mais avec des délais de propagation entre les entrées et les poids synaptiques.

5. DISCUSSION ET CONCLUSION

L'approche rappelée ici est déterministe et continue, mais avant tout physiologique, c'est-à-dire fondée sur des concepts de nature biologique, la non-symétrie et la non-localité. Elle se distingue des approches classiques par deux différences majeures (Hopfield 82 et Chua 88) :

(i) Les propriétés de l'espace sont incluses dans les densités et non pas dans la connectivité, c'est-à-dire que l'on considère la géométrie et la topologie.

(ii) Plusieurs niveaux d'organisation sont considérés au lieu d'un seul.

Une conséquence importante de cette nouvelle formulation du problème est qu'une nouvelle représentation avec plusieurs niveaux d'organisation et de nouveaux concepts, comme l'interaction fonctionnelle, la non-symétrie, et la non-localité peuvent être définis (Chauvet, 93c-e). Les effets non locaux, qui sont à la base de cette approche, ne peuvent pas être interprétés explicitement sans prendre en compte la structure hiérarchique du système.

Quelques avantages peuvent être tirés de cette représentation continue de la théorie du champ pour les systèmes hiérarchiques (Chauvet 96 et Daya 96), en ce qui concerne la stabilité et l'auto-organisation des systèmes biologiques. Le comportement collectif des cellules assemblées à chaque niveau d'organisation (Singer 88), et la sélection des groupes de neurones (Edelman 81, Edelman et al. 84) peuvent être directement déduits avec la théorie du champ proposée (Chauvet 96).

Dans ce papier, nous avons rappelé le formalisme des champs et formulé mathématiquement les équations du champ en considérant les différents mécanismes physiologiques. Etant donné que les équations du champ non locales représentent mieux la réalité en décrivant la dynamique continue et hiérarchique du système nerveux, nous avons pu déterminer les conditions portant notamment sur les fonctions densité, qui permettent de passer au système discret pour un neurone connecté à n neurones d'entrée. Par analogie, des conditions similaires peuvent être facilement déterminées pour un réseau de neurones.

A partir de cette nouvelle approche, on peut espérer déterminer de nouvelles propriétés pour des structures neuronales telles que le cervelet ou l'hippocampe. Diverses règles d'apprentissage, dont celle de Hebb, peuvent aussi en être déduites. La prochaine étape sera d'appliquer les équations du champ du système nerveux à un problème d'apprentissage, afin de comparer la dynamique continue du réseau neuronal biologique avec les réseaux de neurones discrets classiquement utilisés.

Références

- M.A. ARBIB, Organizational principles for theoretical neurophysiology. In: Towards a theoretical biology, 4. Essays. Edinburgh:Edinburgh University Press, 1972.
- R.L. BEURLE, Properties of a mass of cells capable of regenerating pulses. *Phil. Trans. R. Soc., Lond.* 668, 240, 1956, pp. 8-94.
- G.A. CHAUVET, Habituation rules for a theory of the cerebellar cortex. *Biological Cybernetics* 55, 1986, pp. 1-9.

- G.A. CHAUVET, Non locality in biological systems results from hierarchy. Application to the nervous system. *Journal of Mathematical Biology*, 31, 1993a, pp. 475-486.
- G.A. CHAUVET, An n -level field theory of biological neural networks. *Journal of Mathematical Biology*, 31, 1993b, pp. 771-795.
- G.A. CHAUVET, Hierarchical functional organization of a formal biological system: A dynamical approach. I. The increase of complexity by self-association increases the domain of stability of a biological system. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. B.*, 339, 1993c, pp. 425-444.
- G.A. CHAUVET, Hierarchical functional organization of a formal biological system: A dynamical approach. II. The concept of non-symmetry leads to a criterium of evolution deduced from an optimum principle of the (O-FBS) sub-system. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. B.*, 339, 1993d, pp. 445-461.
- G.A. CHAUVET, Hierarchical functional organization of a formal biological system: A dynamical approach. III. The concept of non-locality leads to a field theory describing the dynamics at each level of organization of the (D-FBS) sub-system. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. B.*, 339, 1993e, pp. 463-481.
- G.A. CHAUVET, On associative motor learning by the cerebellar cortex: from Purkinje unit to network with variational learning rules. *Mathematical Biosciences*, 126, 1995, pp. 41-79.
- G.A. CHAUVET, *Theoretical Systems in Biology: Hierarchical and Functional Integration. Volume I: Molecules and Cells*, Oxford:Pergamon, 1996a.
- G.A. CHAUVET, *Theoretical Systems in Biology: Hierarchical and Functional Integration. Volume III: Organisation and Regulation*, Oxford:Pergamon, 1996b.
- L.O. CHUA, L. Yang, Cellular Neural Networks: Theory. *IEEE trans. Circuits Syst.* 35(10), 1988, pp. 1257-1272.
- B. DAYA, G.A. CHAUVET, On the role of hierarchy and geometry on learning in cerebellar cortex using a field theory. 3rd Syst. Science European Congress, Rome, Oct. 1996, pp. 31-36.
- G.M. EDELMAN, Group selection as the basis for higher brain function. In : Schmitt, F.O., Worden, F.G., Edelman, G.M., Dennis, S.G. (eds.) *Organization of the cerebral cortex*. Cambridge, MA: MIT Press 1981, pp. 51-100.
- G.M. EDELMAN, L.H. FINKEL, Neuronal group selection in the cerebral cortex. In: Edelman, G.M., Gall, W.E., Cowan, W.M. (eds.) *Dynamic aspects of neocortical function*, pp. 653-695. New York: Wiley 1984.
- B. FISHER, A neuron field theory: Mathematical approaches of the problem of large numbers of interacting nerve cells. *Bulletin of Mathematical Biology*, 35(3), 1973, p. 345.
- J. GRIFFITH, A field theory of neural nets. *Bulletin of Mathematical Biophysics*. 25, 1963, pp. 111-120.
- A.L. HODGKIN, A.F. HUXLEY, A quantitative description of current and its application to conduction and excitation in nerve. *J. Physiol.* 117, 1952, p. 500.
- J.J. HOPFIELD, Neural Networks and physical systems with emergent collective computational abilities. *Proc. Natl. Acad. Sci., USA* 79, 1982, pp. 2254-2558.
- K. KISHIMOTO, S. AMARI, Existence and stability of local excitations in homogeneous neural fields. *Journal of Mathematical Biology*, 7, 1979, pp. 303-318.
- J.D. MURRAY, *Mathematical biology*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1989.

A. OKUBO, Diffusion and Ecological Problems: Mathematical Models. (Biomath., vol. 10) Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1980.

W. SINGER, Pattern recognition and self-organization in biological systems. In : Marko, H., Hauske, G., Struppler, A. (eds.) Processing structures for perception and action. D-6940 Weinheim: VCH 1988.

H.R. WILSON, J.D. COWAN, Excitatory and inhibitory interactions in localized populations of model neurons. Biophys. J. 12, 1972, pp. 1-24.

ESSAI D'INTERPRÉTATION SYSTÉMIQUE D'UN RITE INITIATIQUE DE LA SOCIÉTÉ MOSSI

Gérard DONNADIEU*

Résumé

Dans cet article, la méthode systémique est utilisée pour analyser et comprendre un rite d'initiation – le pôko – dans une ethnie paysanne d'Afrique de l'Ouest, celle des Sukomsé, elle-même incluse dans la société Mossi. Ce rite est situé dans son environnement physique, social et religieux dont il est en grande partie tributaire. Il est saisi successivement au travers de son **aspect fonctionnel** (à quoi sert-il ? quelle est sa fonction sociale ?), de son **aspect structural** (de quoi est-il composé et de quelle manière ?) pour lequel on fait appel aux concepts élaborés par Claude Lévi-Strauss et de son **aspect historique** (quel est son rapport au temps ?) aspect qui dans ce cas précis tourne autour de la question du processus de transmission et de reproduction sociale.

Fait social complet, le rite étudié apparaît comme "faisant système" avec l'ensemble des croyances religieuses, des pratiques sociales et plus largement de la culture de l'ethnie Sukomsé.

Abstract

In this article, the systemic method is used to analyze and understand an initiation rite – the Pôko – in a peasant west African ethnic group – the Sukomse Group – included in the Mossi Society.

This rite is located in its physical, social and religious environment and mostly depends on it. It is analyzed, successively through its **functional aspect** (what is it used for? what is its social function?), through its **structural aspect** (what is it made up and in which way?) and concepts elaborated by Claude Lévi-Strauss have been called out. It is also analyzed through its **historical aspect** (connection to time), which is related to the transmission process and social reproduction question.

* Directeur d'Études à Entreprise & Personnel, Maître de Conférences à l'IAE de Paris (Université Panthéon-Sorbonne). Entreprise & Personnel, 69, quai de Grenelle, 75015 Paris ; IAE de Paris, 162, rue Saint-Charles, 75140 Paris Cedex.